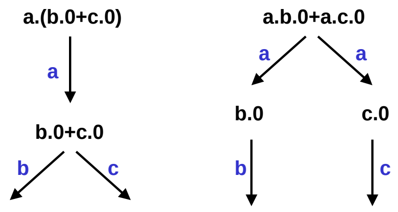
プロセス等価と時相論理

国立情報学研究所

佐藤一郎
E-mail: ichiro@nii.ac.jp

プロセス論理

論理学手法を利用したプロセスの使用記述と証明
例:　a.(b.0+c.0) ≠ a.b.0+a.c.0



プロセス論理

構文:
P ::= true | false | P ∧ Q | ¬P | <a> | [a]

非形式的意味

true	真を表す
false	偽を表す
P ∧ Q	PかつQ
¬P	Pの否定
<a>	アクションaに関する可能様相演算子
[a]	アクションaに関する必然様相演算子

プロセス論理

プロセス論理式によるプロセス表現

a.(b.0+c.0) |- <a>(<b>true ∧<c>true)
a.b.0+a.c.0 |- <a><b>true ∧ <a><c>true

Hoare論理の様相論理表現

様相論理

- 可能性: ～は必然である ～は可能である
- 時間: いつでも～である ～であるときがある
- 場所: どこでも～である あるところで～である
- 確実性: ～でなければならない ～かもしれない
- 信念: ～を知っている ～を信じている

□*P* ◇*P*

様相論理

- 様相論理
- 必然性と可能性の論理
- 時相論理
- 知識と信念の論理
- 義務論理
- ダイナミック論理
- 内包論理

論理体系

古典論理 (classical logic)

命題論理
1階述語論理 … 導出原理, Prolog

非古典論理 (non-classical logic)

様相論理
高階論理
内包論理
多ソート論理
多値論理, fuzzy論理
非単調論理
etc.

様相論理の応用

- 知識の表現と推論
- 自然言語理解, 自然言語処理
- プログラムの仕様記述・検証

様相論理式

命題変数 (propositional variable)

P, *Q*, *R*, …

論理結合子 (logical connective)

- ¬ (**否定**, negation)
- ∧ (**連言**, conjunction)
- ∨ (**選言**, disjunction)
- ⇒ (**含意**, implication)
- ⇔ (**同値**, equivalence)

様相演算子 (modal operator)

- □ (**必然**, necessity)
- ◇ (**可能**, possibility)

様相論理式の非形式的意味

命題変数

P, *Q*, *R*, …

α，β：論理式

¬α	…	「αでない」
α∧β	…	「αかつβ」
α∨β	…	「αまたはβ」
α⇒β	…	「αならばβ」
α⇔β	…	「αとβは同値」
□α	…	「αは必然である」
◇α	…	「αは可能である」

□α＝¬◇¬α

◇α＝¬□¬α

様相論理体系

次の公理と推論規則を含む公理系

公理

(PC) **命題論理のすべての恒真式**

(K) □(α⇒β)⇒(□α⇒□β)

K … Kripke

様相論理体系

推論規則 (inference rule)

(MP) $\dfrac{\alpha \quad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$

(N) $\dfrac{\alpha}{\Box \alpha}$

MP … modus ponens (**分離規則**)

N … necessiation (**必然化規則**)

様相論理体系

公理

(D)： □α⇒◇α
(T)： □α⇒α
(B)： ¬α⇒□¬□α
(4)： □α⇒□□α
(5)： ¬□α⇒□¬□α

体系

K, KD, KT, KB, K4, K5, KDB, KD4, KD5, KTB, KT4, KT5, KB4, K45, KD45

可能世界意味論

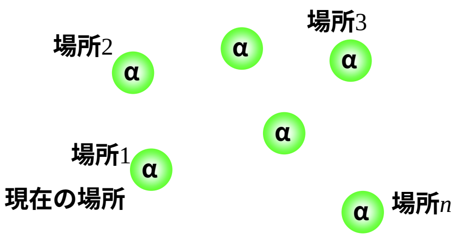
□α

現在の場所・時刻とは別の場所・時刻における α の真理値を考慮する

場所・時刻 … 可能世界 (possible world)
可能世界ごとに論理式を解釈

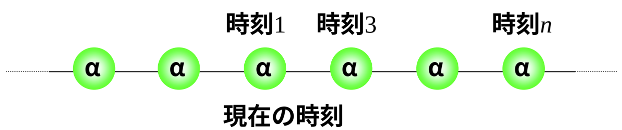
可能世界意味論

□α … どこでもαである



可能世界意味論

□α … いつでもαである



Kripke 構造 (structure)

$M = \langle W, R, V \rangle$
$W \neq \phi$
　$w \in W$ … 可能世界 (possible world)，世界
$R \subseteq W^2$
　W上の到達関係 (accessibility relation)

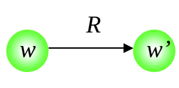
復習：代数的関係

集合 A と集合 B の直積 (direct product)
　$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$
集合 A から集合 B への 2項関係
　$R \subseteq A \times B$
要素 a から要素 b へ関係 R がある
　$(a, b) \in R$
　$a\,R\,b$

集合 A 上の 2項関係　$R \subseteq A \times A$ （$= A^2$）

Kripke 構造

$M = \langle W, R, V \rangle$
$W \neq \phi$
　$w \in W$ … 世界 (world)
$R \subseteq W^2$
　W上の到達関係 (accessibility relation)
　wRw' … w' は w から到達可能
$V : P \times W \rightarrow \{T, F\}$
　P：すべての命題変数からなる集合
　真理値割当 (truth value assignment)



Kripke構造の解釈

$M = \langle W, R, V \rangle$ ：Kripke 構造
論理式αは構造 M の世界 $w \in W$ において真
　($\models_{M, w} \alpha$)

命題変数 P に対して，
　$\models_{M, w} P$　iff　$V(P, w) = T$
$\models_{M, w} \neg\alpha$　iff　$\models_{M, w} \alpha$ でない
$\models_{M, w} \alpha \wedge \beta$　iff　$\models_{M, w} \alpha$ かつ $\models_{M, w} \beta$
$\models_{M, w} \alpha \vee \beta$　iff　$\models_{M, w} \alpha$ または $\models_{M, w} \beta$

Kripke構造の解釈

$M = \langle W, R, V\rangle$ ：Kripke 構造
論理式αは構造 M の世界 $w \in W$ において真
（$\models_{M,w}$ α）

$\models_{M,w}$ α⇒β
iff $\models_{M,w}$ αならば $\models_{M,w}$ β
$\models_{M,w}$ α⇔β
iff $\models_{M,w}$ αと $\models_{M,w}$ βは必要十分

Kripke構造の解釈

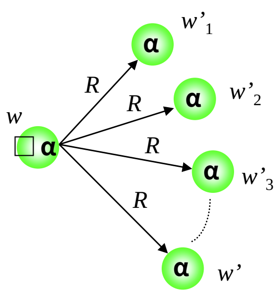
$M = \langle W, R, V\rangle$ ：Kripke 構造
論理式αは構造 M の世界 $w \in W$ において真
（$\models_{M,w}$ α）

$\models_{M,w}$ □α
iff wRw' を満たすすべての w' に対して，
$\models_{M,w'}$ α

w から到達可能なすべてのw' に対して，$\models_{M,w'}$ α

Kripke構造の解釈

$\models_{M,w}$ □α
iff wRw' を満たすすべての w' に対して，
$\models_{M,w'}$ α



Kripke構造の解釈

$M = \langle W, R, V\rangle$ ：Kripke 構造
論理式αは構造 M の世界 $w \in W$ において真
（$\models_{M,w}$ α）

$\models_{M,w}$ ◇α
iff wRw' を満たすあるw'に対して，
$\models_{M,w'}$ α

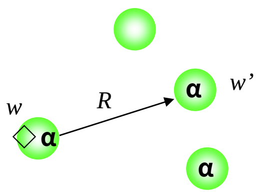
w から到達可能なある w' に対して，$\models_{M,w'}$ α

Kripke構造の解釈

$\models_{M,w} \Diamond \alpha$

iff wRw' を満たすあるw'に対して,

$\models_{M,w'} \alpha$



分岐時相論理の構文

時相論理(CTL:Computation Tree Logic)

CTL式

原子命題

通常の演算子：∨, ∧, ¬ (not), →

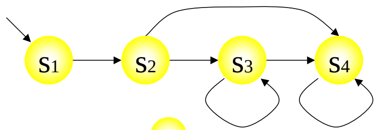
時相演算子：EX, EF, EG, EU,

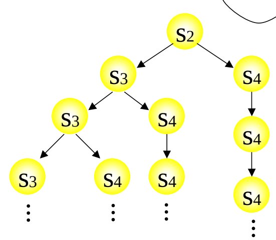
AX, AF, AG, AU

分岐時相論理

CTL式の真偽値

状態グラフ (state graph) 上の状態とそこから始まるパスを考える



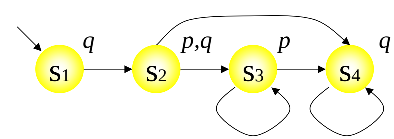


分岐時相論理の解釈

CTL式の真偽値

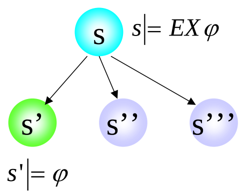
CTL式 が状態sで成立する(がsで真): $s \models \varphi$

原子命題, ∨, ∧, ¬ (not), → :その状態だ けで真偽値が決まる



分岐時相論理の解釈

CTL式の真偽値　$s \models EX\varphi \Leftrightarrow s$ 　のある次の状態s'で

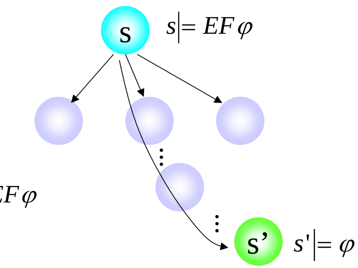


分岐時相論理の解釈

CTL式の真偽値

$s \models EF\varphi \Leftrightarrow s$ から始まるあるパス中に

$s' \models \varphi$ なるs'が存在



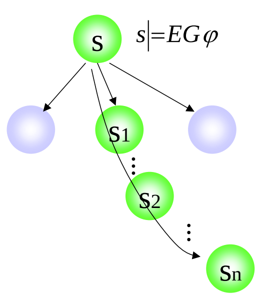
$s \models \varphi$ なら $s \models EF\varphi$

分岐時相論理の解釈

CTL式の真偽値

$s \models EG\varphi$ 　から始まるあるパス中では,

そのパス中の すべての状態sにおいて　$s' \models \varphi$



$s \models \varphi$

$s_1 \models \varphi$

$s_2 \models \varphi$

…

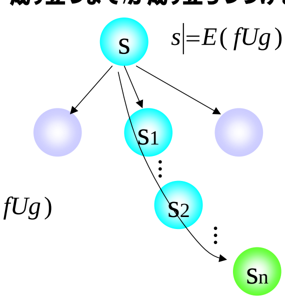
$s_n \models \varphi$

分岐時相論理の解釈

CTL式の真偽値

$s \models E(fUg)$　から始まるあるパス中では, gが

成り立つまでfが成り立ちつづける



$s \models g$ なら $s \models E(fUg)$

$s \models f$

$s_1 \models f$

$s_2 \models f$

…

$s_n \models g$

分岐時相論理の解釈

CTL式の真偽値

$s \models AX\varphi$ のすべての次の状態s' で $s' \models \varphi$