平成16年度「プログラムの数理」期末試験

平成16年2月7日 8:30 – 10:00

工学部6号館63号室

問1 つぎの定義による関数 f を考えよう。

$$
\begin{array}{lcl}
f\ [\,] & = & [\,] \\
f\ (x : xs) & = & f'\ x\ xs \\
f'\ c\ [\,] & = & [c] \\
f'\ c\ (x : xs) & = & \textbf{if}\ c == x\ \textbf{then}\ f'\ c\ xs\ \textbf{else}\ c : f'\ x\ xs
\end{array}
$$

(a) 関数 f と f' の型を与えよ。

(b) 最外簡約による式 $f\ [1, 2, 2, 3, 3, 1]$ を計算する簡約系列を示せ。

(c) f を foldr あるいは foldl を用いて非再帰的に定義せよ。

(d) 前問で答えた非再帰的な定義は元の定義と等しいことを証明せよ。

問2 数のリスト $xs = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ が与えられているとき、連続した極大部分列 ($\mathit{ssm}\ xs$) とは、$j_1 = 1$ で $j < j_m$ に対して $x_j < x_{j_m}$ を満たすような最長の部分列 $[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}]$ のことである。例えば、$[3, 1, 3, 4, 9, 2, 10, 7]$ の連続極大部分列は $[3, 4, 9, 10]$ となる。関数 ssm を定義せよ。

問3 無限リスト ones と twos が次のように定義される。

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{ones} & = & 1 : \mathit{ones} \\
\mathit{twos} & = & 2 : \mathit{twos}
\end{array}
$$

次の等式を証明せよ。

$$\mathit{twos} = \mathit{map}\ (1+)\ \mathit{ones}$$

問4 (a) 次の融合変換定理を証明せよ。

すべての x と y に対して $f\ (g\ x\ y) = h\ x\ (f\ y)$ が成立するならば、

$$f \cdot \mathit{foldr}\ g\ a = \mathit{foldr}\ h\ (f\ a)$$

が成立する。

(b) 融合変換定理を用いて、$\mathit{foldr}\ (+)\ 0 \cdot \mathit{map}\ (2*) = \mathit{foldr}\ h\ b$ を満たす h と b を導出せよ。