

# 操作的意味論



国立情報学研究所

佐藤一郎

E-mail: ichiro@nii.ac.jp

Ichiro Satoh

## ▶ 操作的意味論

抽象的な計算機を定義し、プログラミング言語の意味を抽象的計算機の動作(状態遷移)として記述する

抽象機械の例

- 有限状態機械(オートマトン)
- チューリングマシン
- ランダムアクセス機械
- ラムダ計算

プログラミング言語の意味定義には不適當

- 構造操作的意味論 (Plotkin)

Ichiro Satoh

## ▶ 操作的意味の定義

計算はコード $e$ と実行状況の組  $e$ ,

遷移関係を計算のステップとする  $c \longrightarrow c'$

遷移関係を推論規則により定義 
$$\frac{c \longrightarrow c'}{f(c) \longrightarrow f(c')}$$

Ichiro Satoh

## ▶ 操作的意味

数式の操作的意味  $e ::= m \mid e_0 + e_1$  ( $m$ は数字)

遷移関係  $e \longrightarrow e'$

推論規則 (Rule 1) 
$$\frac{e_0 \longrightarrow e'_0}{e_0 + e_1 \longrightarrow e'_0 + e_1}$$

(Rule 2) 
$$\frac{e_1 \longrightarrow e'_1}{m_0 + e_1 \longrightarrow m_0 + e'_1}$$

(Rule 3)  $m_0 + m_1 \longrightarrow m_2$   
if  $m_2$  is the sum of  $m_0$  and  $m_1$

Ichiro Satoh

## ▶ 操作的意味の例

例:  $(1 + (2 + 3)) + (4 + 5) \rightarrow (1 + 5) + (4 + 5)$

$2 + 3 \rightarrow 5$  (By rule 3)  
 $1 + (2 + 3) \rightarrow 1 + 5$  (By rule 2)  
 $(1 + (2 + 3)) + (4 + 5) \rightarrow (1 + 5) + (4 + 5)$  (By rule 1)

rule 1  $\frac{e_0 \rightarrow e'_0}{e_0 + e_1 \rightarrow e'_0 + e_1}$      rule 3  $m_0 + m_1 \rightarrow m_2$   
 rule 2  $\frac{e_1 \rightarrow e'_1}{m_0 + e_1 \rightarrow m_0 + e'_1}$      if  $m_2$  is the sum of  $m_0$  and  $m_1$

Ichiro Satoh

## ▶ 遷移システム

- 計算状況(Configuration)を  $\langle e, \sigma \rangle$  とする:
- 遷移システム(Transition System)  $\langle X, \rightarrow \rangle$   $\times$  とするとき、 $\langle X, \rightarrow \rangle$  を遷移システムといい  $(\langle e, \sigma \rangle, \langle e', \sigma' \rangle)$  のとき、 $\langle e, \sigma \rangle \rightarrow \langle e', \sigma' \rangle$  と書く
- 遷移システム  $\langle X, \rightarrow \rangle$  において  $\langle e, \sigma \rangle$  となる  $\langle e', \sigma' \rangle$  が存在しないとき、 $\langle e, \sigma \rangle$  を終了状況と呼ぶ
- 遷移システム  $\langle X, \rightarrow \rangle$  は次の条件を満足するときにチャーチ・ロッサー性あるいは合流性を持つという。  
 任意の  $\langle e, \sigma \rangle$  に対して  $\langle e_1, \sigma_1 \rangle$  及び  $\langle e_2, \sigma_2 \rangle$  であれば、ある  $\langle e', \sigma' \rangle$  が存在し、 $\langle e_1, \sigma_1 \rangle \rightarrow \langle e', \sigma' \rangle$  及び  $\langle e_2, \sigma_2 \rangle \rightarrow \langle e', \sigma' \rangle$  となる

Ichiro Satoh

## ▶ 操作的意味論(数式)

数式の構文

$e ::= m \mid v \mid (e + e') \mid (e - e') \mid (e \times e')$

Ichiro Satoh

## ▶ 操作的意味論(数式)

計算状況  $\Gamma = \{ \langle e, \sigma \rangle \}$      遷移関係  $\langle e, \sigma \rangle \rightarrow \langle e', \sigma' \rangle$

足し算の操作的意味の定義(他の演算も同様)

$\frac{\langle e_0, \sigma \rangle \rightarrow \langle e'_0, \sigma \rangle}{\langle e_0 + e_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle e'_0 + e_1, \sigma \rangle}$   
 $\frac{\langle e_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle e'_1, \sigma \rangle}{\langle m + e_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle m + e'_1, \sigma \rangle}$   
 $\langle m + m', \sigma \rangle \rightarrow \langle n, \sigma \rangle$  (where  $n = m + m'$ )  
 $\langle v, \sigma \rangle \rightarrow \langle \sigma(v), \sigma \rangle$

Ichiro Satoh

## ▶ 操作的意味論(論理式)

構文:  $b ::= t \mid b \text{ or } b' \mid e = e' \mid \sim b$

操作的意味(or-式)

1. 
$$\frac{\langle b_0, \sigma \rangle \rightarrow \langle b'_0, \sigma \rangle}{\langle b_0 \text{ or } b_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle b'_0 \text{ or } b_1, \sigma \rangle}$$
2. 
$$\frac{\langle b_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle b'_1, \sigma \rangle}{\langle b_0 \text{ or } b_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle b_0 \text{ or } b'_1, \sigma \rangle}$$
3.  $\langle \text{tt} \text{ or } b_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle \text{tt}, \sigma \rangle$
4.  $\langle b_0 \text{ or } \text{tt}, \sigma \rangle \rightarrow \langle \text{tt}, \sigma \rangle$
5.  $\langle \text{ff} \text{ or } b_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle b_1, \sigma \rangle$
6.  $\langle b_0 \text{ or } \text{ff}, \sigma \rangle \rightarrow \langle b_0, \sigma \rangle$

Ichiro Satoh

## ▶ 操作的意味論(論理式)

構文:  $b ::= t \mid b \text{ or } b' \mid e = e' \mid \sim b$

操作的意味(等号)

1. 
$$\frac{e_0 \rightarrow e'_0}{e_0 = e_1 \rightarrow e'_0 = e_1}$$
2. 
$$\frac{e_1 \rightarrow e'_1}{m = e_1 \rightarrow m = e'_1}$$
3.  $m = n \rightarrow t$   
(where  $t$  is  $\text{tt}$  if  $m = n$  and  $\text{ff}$  otherwise)

Ichiro Satoh

## ▶ 操作的意味論(論理式)

構文:  $b ::= t \mid b \text{ or } b' \mid e = e' \mid \sim b$

操作的意味(否定)

1. 
$$\frac{b \rightarrow b'}{\sim b \rightarrow \sim b'}$$
2.  $\sim t \rightarrow t'$  (where  $t' = \neg t$ )

Ichiro Satoh

## ▶ 操作的意味論(コマンド)

構文:  $e ::= \text{nil} \mid v := e \mid c; c'$

操作的意味  $\Gamma = \{\langle c, \sigma \rangle\} \cup \{\sigma\}$

Nil:  $\langle \text{nil}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma$

Assignment:

$$1. \frac{\langle e, \sigma \rangle \rightarrow^* \langle m, \sigma \rangle}{\langle v := e, \sigma \rangle \rightarrow \sigma[m/v]}$$

Composition:

$$1. \frac{\langle c_0, \sigma \rangle \rightarrow \langle c'_0, \sigma' \rangle}{\langle c_0; c_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle c'_0; c_1, \sigma' \rangle} \quad 2. \frac{\langle c_0, \sigma \rangle \rightarrow \sigma'}{\langle c_0; c_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle c_1, \sigma' \rangle}$$

Ichiro Satoh

## ▶ 簡易言語

構文:

$c ::= \text{nil} \mid v := e \mid c; c' \mid \text{if } b \text{ then } c \text{ else } c' \mid \text{while } b \text{ c}$

Ichiro Satoh

## ▶ 操作的意味論(簡易言語)

簡易言語の意味

$\langle \text{nil}, \sigma \rangle \rightarrow \sigma$

$$\frac{\langle c_0, \sigma \rangle \rightarrow \langle c'_0, \sigma' \rangle}{\langle c_0; c_1, \sigma \rangle \rightarrow \langle c'_0; c_1, \sigma' \rangle} \quad \frac{\langle e, \sigma \rangle \rightarrow^* \langle m, \sigma \rangle}{\langle v := e, \sigma \rangle \rightarrow \sigma[m/v]}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \rightarrow^* \langle \text{tt}, \sigma \rangle}{\langle \text{if } b \text{ then } c \text{ else } c', \sigma \rangle \rightarrow \langle c, \sigma \rangle}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \rightarrow^* \langle \text{tt}, \sigma \rangle}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightarrow \langle c; \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \rightarrow^* \langle \text{ff}, \sigma \rangle}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma}$$

Ichiro Satoh

## ▶ 静的意味と動的意味

静的意味

- 実行前に定められる意味  
型チェック、変数領域

動的意味

- 実行中に定まる意味  
制御フロー、変数代入

Ichiro Satoh

## ▶ 型付き簡易言語

構文

Expressions:  $e \in \text{Exp}$  where:

$e ::= m \mid t \mid v \mid e_0 \text{ bop } e_1 \mid \sim e$

Commands:  $c \in \text{Com}$  where:

$c ::= \text{nil} \mid v := e \mid c_0; c_1 \mid \text{if } e \text{ then } c_0 \text{ else } c_1 \mid \text{while } e \text{ do } c$

$\text{bop} \in \text{BOp} = \{+, -, *, =, \text{or}\}$

Ichiro Satoh

## ▶ 型付き簡易言語

**型** Types:  $\tau \in \text{Types} = \{\text{int}, \text{bool}\}$

$e : \tau \equiv e$  has type  $\tau$

**型推論 (静的意味論)**

Truthvalues:	$t : \text{bool}$	$+, -, *$	bool	int
		bool	?	?
		int	?	int
Numbers:	$m : \text{int}$	=	bool	int
Variables:	$e : \text{int}$	or	bool	int
Binary Operations:	$\frac{e_0 : \tau_0 \quad e_1 : \tau_1}{e_0 \text{ bop } e_1 : \tau_2}$	or	bool	int
Negation:	$\frac{e : \text{bool}}{\sim e : \text{bool}}$	bool	bool	?
		int	?	?

*Ichiro Satoh*

## ▶ 型付き簡易言語

**型推論**  $\text{Wfc}(c) \equiv c$  is a well-formed command.

Nil:	$\text{Wfc}(\text{nil})$
Assignment:	$\frac{e : \text{int}}{\text{Wfc}(v := e)}$
Sequencing:	$\frac{\text{Wfc}(c_0) \quad \text{Wfc}(c_1)}{\text{Wfc}(c_0; c_1)}$
Conditional:	$\frac{e : \text{bool} \quad \text{Wfc}(c_0) \quad \text{Wfc}(c_1)}{\text{Wfc}(\text{if } e \text{ then } c_0 \text{ else } c_1)}$
While:	$\frac{e : \text{bool} \quad \text{Wfc}(c)}{\text{Wfc}(\text{while } e \text{ do } c)}$

*Ichiro Satoh*

## ▶ 参考文献 (カテゴリ)

- R. L. Crole, "Categories for Types", Cambridge University Press, 1993.
- B. Jacobs, "Categorical Logic and Type Theory", Elsevier, 1999.
- F. Borceux, "Handbook of Categorical Algebra", Cambridge Univ. Press, 1994.
- M. Barr and C. Wells, "Category Theory for Computing Science", Prentice-Hall

*Ichiro Satoh*