計算モデル特論

国立情報学研究所

佐藤一郎

E-mail: ichiro@nii.ac.jp

http://research.nii.ac.jp/~ichiro

講義内容

計算モデル、プログラミング言語意味論、型理論に関してオムニバス的に紹介する

講義内容 (予定)

- 計算モデル
  - 抽象機械モデル、関数型モデル、プロセス代数 (プロセスカルキュラス)
- プログラミング言語意味論
  - 操作意味論、表示意味論、公理意味論
- 型理論
  - 型付きラムダ計算、多相型、オブジェクト指向型

講義スケジュール

- 計算モデルとは
- プログラミング言語意味論
  - 操作意味論
- 並列分散計算のモデル
  - CCS (Calculus for Communicating Systems)
  - π-calculus
  - Petri-net
  - 時相論理
- 型理論

計算モデル

計算モデルの必要性

- 世の中の情報処理システムは非常に複雑
- この情報処理システムがどのような原理に基づくかを知るには数学的基盤を持つ抽象的な枠組みを導入する必要がある。

情報処理システムの抽象的な枠組み＝計算モデル

計算モデルを通じて「計算」という概念を明確化する

履修者への質問

講義内容とレベルは履修者の背景知識と関心により決める

履修者の背景知識に関する質問

- 集合または代数論の講義の履修 (有／無)
- オートマトンの講義の履修 (有／無)
- 一階述語論理の講義の履修 (有／無)
- 計算モデルに関する講義の履修 (有／無)

卒論または修論テーマは？

参考書

- 井田哲雄：“計算モデルの基礎理論”、岩波書店
- M.Hennessy: “プログラミング言語意味論”、サイエンス社
- 大堀淳著：“プログラミング言語の基礎理論”、共立出版
- R.Milner：“Communication and Concurrency”、Prentice Hall
- R.Milner：“π-calculus”、Cambridge University Press

講義形態

評価： レポート (数回)
休講日：10/21

講義の目標

- 各種の計算モデルについて学ぶこと
- プログラミング言語意味論について学ぶこと
- 計算の数学的な取り扱いに慣れること
- 計算モデルを通じて計算という概念を理解すること
- ものの原理を見抜くセンスを養うこと

「計算」とは

「計算」とは、
ある「アルゴリズム」に基づいて、ある基本的な手順を実行し目的とする結果を得る作業

しかし、実際の情報処理システムは複雑であり、本来の基本原理である「計算」が不明確

- 数学的な裏付けをもつ抽象的な枠組み（＝計算モデル）を導入し、
- 記号の書き換えとして計算を再現する

計算モデルの必要性

- 計算機のハードウェア
  複雑すぎて扱えない
- CやPascalなどで書かれたプログラム
  数学的な厳密さを持つとは限らない
- プログラムを入力から出力を得るものとする
  例：数学的な関数
  ただし、実際に入力を与えても、その答え（出力）が導けるとは限らない

代表的な計算モデル

（逐次）計算モデル：
- 抽象機械計算モデル
- 関数型計算モデル
- 論理型計算モデル
- 項書き換え型計算モデル

（並列分散）計算モデル
- 抽象機械計算モデル
- プロセス代数（プロセスカルキュラス）
- イベント機械モデル（ペトリネット）

プログラミング意味論

国立情報学研究所

佐藤一郎
E-mail: ichiro@nii.ac.jp

プログラミング言語

構文(syntax)
- プログラミング言語の文法、表現

意味論(semantics)
- プログラムがどのような動作・結果を持つかを定式化

語用論(pragmatics)
- プログラムの書き方

Ichiro Satoh

プログラミング言語の意味

プログラミング言語の意味の定義方法
- 計算機のハードウェア動作として理解する
- 日本語や英語などの自然言語により意味を記述する
- 既知のプログラミング言語によって類似の文・式の意味を記述する

厳密で矛盾なく意味を定義するには
形式的意味論(formal semantics)
- 計算機とは独立して厳密に規定できること
- 定義に曖昧さがないこと
- プログラムの推論・解析に理論的基礎を提供すること

Ichiro Satoh

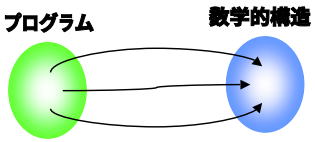
意味論

プログラミング言語意味論
- 操作意味論(Operational Semantics)
- 表示意味論(Denotational Semantics)
- 公理意味論(Axiomatic Semantics)

Ichiro Satoh

表示的意味論

集合や関数などの数学的概念を用いて構文上の対象の意味を記述



Ichiro Satoh

表示意味論

構文構成要素ごとに意味を定義

S ::= if E then S else S
| while E do S od
| S;S
| E:=E

⟨⟩ c: M →(M→M)　　ここでcは環境(変数の中身を定義)
⟨if E then S1 else S2⟩ c= ⟨S1⟩ c (⟨E⟩ c=trueのとき)
= ⟨S2⟩ c (⟨E⟩ c=falseのとき)
⟨while E do S od⟩ c = ⟨while E do S od⟩ c
(⟨S⟩ c) (⟨E⟩ c=trueのとき)
= ⟨⟩
⟨S1;S2⟩ c = ⟨S2⟩ c(⟨S1⟩ c)
⟨E1:=E2⟩ c = c[⟨E2⟩ c/ ⟨E1⟩ c]

公理的意味論

プログラミング言語の意味を公理と推論規則によって定めようとするもの

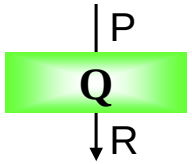
- Hoareモデル
- 時相論理による意味定義他

Hoare論理

プログラムの事前条件と事後条件を論理式により定式化

P{Q}R

プログラムQを実行直前に論理式Pが成立して、もしQの実行が終了すれば、その直後に論理式Rが成立する



Hoare論理

Hoare論理によるプログラミング意味論

$$c ::= \texttt{null} \mid v = e \mid c_1 \,;\, c_2 \mid \texttt{if}(e)\, c_1\, \texttt{else}\, c_2 \mid \texttt{while}(e)\, c$$

null $\dfrac{P \supset Q}{P\{\texttt{null}\}Q}$

assignment $\dfrac{P \supset Q\left[{}^{e}/_{x}\right]}{P\{x = e\}Q}$

sequence $\dfrac{P\{c_1\}R \qquad R\{c_2\}Q}{P\{c_1 \,;\, c_2\}Q}$

if-statement $\dfrac{P \wedge e\{c_1\}Q \qquad P \wedge \neg e\{c_2\}Q}{P\{\texttt{if}(e)\, c_1\, \texttt{else}\, c_2\}Q}$

while-statement $\dfrac{P \supset L \qquad L \wedge e\{c\}L \qquad L \wedge \neg e \supset Q}{P\{\texttt{while}(e)\, c\}Q}$

操作的意味論

抽象的な計算機を定義し、プログラミング言語の意味を抽象的計算機の動作（状態遷移）として記述する

抽象機械の例
- 有限状態機械（オートマトン）
- チューリングマシン
- ランダムアクセス機械
- ラムダ計算

プログラミング言語の意味定義には不適当
- 構造操作的意味論 (Plotkin)

Ichiro Satoh

操作的意味論

数式の操作的意味

$$e ::= m \mid v \mid (e + e') \mid (e - e') \mid (e \times e')$$

$$\frac{\langle e_0, \sigma\rangle \longrightarrow \langle e_0', \sigma\rangle}{\langle e_0 + e_1, \sigma\rangle \longrightarrow \langle e_0' + e_1, \sigma\rangle}$$

$$\frac{\langle e_1, \sigma\rangle \longrightarrow \langle e_1', \sigma\rangle}{\langle m + e_1, \sigma\rangle \longrightarrow \langle m + e_1', \sigma\rangle}$$

$$\langle m + m', \sigma\rangle \longrightarrow \langle n, \sigma\rangle \qquad (\text{where } n = m + m')$$

Ichiro Satoh

操作的意味論

簡易言語の意味

$$\langle \text{nil}, \sigma\rangle \longrightarrow \sigma$$

$$\frac{\langle c_0, \sigma\rangle \longrightarrow \langle c_0', \sigma'\rangle}{\langle c_0;\ c_1, \sigma\rangle \longrightarrow \langle c_0';\ c_1, \sigma'\rangle} \qquad \frac{\langle e, \sigma\rangle \longrightarrow^* \langle m, \sigma\rangle}{\langle v := e, \sigma\rangle \longrightarrow \sigma[m/v]}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \longrightarrow^* \langle \text{tt}, \sigma\rangle}{\langle \text{if } b \text{ then } c \text{ else } c', \sigma\rangle \longrightarrow \langle c, \sigma\rangle}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \longrightarrow^* \langle \text{tt}, \sigma\rangle}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma\rangle \longrightarrow \langle c;\ \text{while } b \text{ do } c, \sigma\rangle}$$

$$\frac{\langle b, \sigma\rangle \longrightarrow^* \langle \text{ff}, \sigma\rangle}{\langle \text{while } b \text{ do } c\ , \sigma\rangle \longrightarrow \sigma}$$

Ichiro Satoh