計算モデル特論

健全性と完全性

国立情報学研究所
佐藤一郎
E-mail: ichiro@nii.ac.jp

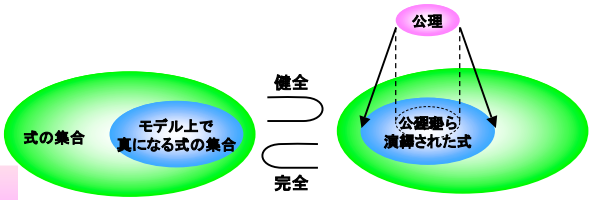
意味論

意味論の与え方は一通りではない。

- 一階述語論理の場合
  - 古典論理、直観主義論理に対応した意味論 (健全性が成立)
  - 古典論理に対する完全性が成立
  - 直観主義論理に対する完全性は不成立(より複雑な構造が必要)
- プロセス計算の場合
  - 等価性が意味論
  - 制限されたプロセスは強等価(完全かつ健全)
  - 観測等価(健全性)

完全性と健全性

健全性
　公理系により演繹された式はモデルにおいても真になる
完全性
　モデルにおいて真となる式は公理系によっても演繹される



健全性と完全性

- 健全性
  一階述語論理の形式的体系(講義で与えたもの)で証明可能な論理式は、ここで与えた標準的意味論のどのモデルにおいても真である。
- 完全性
  ここで与えた意味論のどのモデルにおいても真である論理式は、一階述語論理(古典論理)の体系で証明可能である。

真理値表

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

命題論理の公理系

公理(axiom)

(A1) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

(A2) $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$

(A3) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha)$

推論規則(inference rule)

(MP) α

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$$

MP … modus ponens(分離規則)

充足可能性

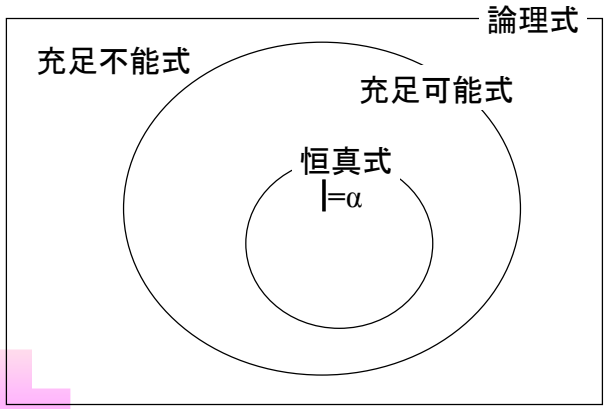
α : 論理式

- 解釈 φは α を充足する(satisfy)
  $[P]_\varphi = \top$
  (解釈φにおいて論理式αが真になる)
- α は充足可能(satisfiable)
  α を充足する解釈が存在する
  (論理式αを真にする解釈φが存在する)
- α は恒真(妥当)(valid)
  任意の解釈 φが α を充足する
  (いかなる解釈φにおいて論理式αが真になる)
- α は充足不能(unsatisfiable)
  α を充足する解釈が存在しない
  (いかなる解釈φにおいて論理式αが真にならない)

証明可能性(provability)

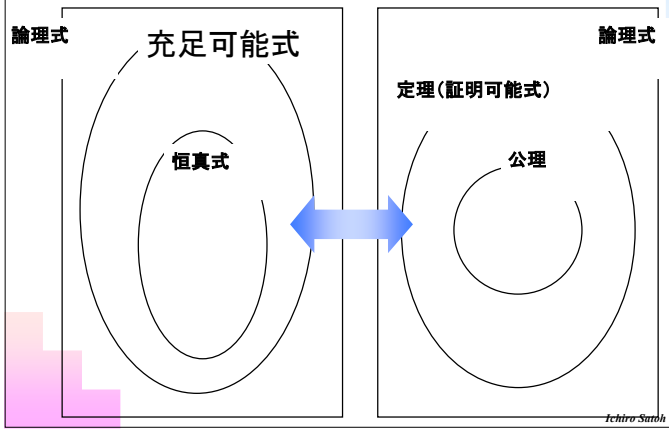
- 論理式αは証明可能(provable) … $\vdash \alpha$
  αは公理である
  または
  αは証明可能な論理式に推論規則を適用して得られる
- 論理式αは定理(theorem)
  αは証明可能
- 論理式αは無矛盾(consistent)
  $\vdash \neg\alpha$でない

恒真式（tautology）



Ichiro Satoh

恒真式と定理



Ichiro Satoh

命題論理の健全性（soundness）

$\vdash\alpha$ ならば $\models\alpha$

[証明]
αが公理ならば，αは恒真である
　公理（A1）～（A3）はどれも恒真
推論規則（MP）は恒真性を保存する
　α と α⇒β が真ならば，βも真である

厳密には
　定理の証明の長さ（推論規則の適用回数）に関する帰納法による．

Ichiro Satoh

命題論理の完全性（completeness）

$\models\alpha$ ならば $\vdash\alpha$

[証明方針]
$\vdash\alpha$ でないならば，$\models\alpha$ でないを示す
$\vdash\alpha$ でないならば，
　ある解釈 φ に対して，φ(α)＝T でないを示す

　　$\vdash\alpha$でないとき，φ(α)＝T でない解釈 φ を作る

Ichiro Satoh

定理（例）

$\vdash \alpha \Rightarrow \alpha$

（A1）　$\alpha \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha)$

（A2）　$(\alpha \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha))$

（MP）　$(\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)$

（A1）　$\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)$

（MP）　$\alpha \Rightarrow \alpha$

一階述語論理の意味論

領域U：空でない集合（無限集合でもよい）

解釈：

関数記号 f^n に対して、

$[f^n] : U^n \rightarrow U$

述語記号 P^n に対して、

$[P^n] : U^n \rightarrow \{true, false\}$

領域Uと、関数記号、述語記号に対する解釈をストラクチャと呼ぶ。

一階述語論理の意味論

変数対する割り当てφ: $V \rightarrow U$

- V の各要素（変数）に対して U の要素を対応つける関数(自由変数の解釈を決めるために使う）
- structure と割り当てφを1つ定める。（以下では、ストラクチャは変えず、φは変えることがあるので、「φのもとでの解釈」とよぶ。

項 t の解釈 $[t]_\varphi = \ldots$

論理式 A の解釈 $[A]_\varphi = \ldots$

一階述語論理の意味論

項 t の解釈

$[x]_\varphi = \varphi(x)$

$[f(t1,\ldots tn)]_\varphi = [f]\ (<[t1],\ldots,[tn]>)$

論理式 A の解釈

$[\bot]_\varphi = false$

$[P(t1,\ldots tn)]_\varphi = [P]\ (<[t1],\ldots,[tn]>)$

$[A \wedge B]_\varphi$= true if $[A]_\varphi$=true and $[B]_\varphi$=true

$[A \vee B]_\varphi$= true if $[A]_\varphi$=true or $[B]_\varphi$=true

$[A \supset B]_\varphi$= true if $[A]_\varphi$=false or $[B]_\varphi$=true

一階述語論理の意味論

論理式 A の解釈

$[\bot]_\varphi$ = false

$[P(t1,...tn)]_\varphi$ = [P] (<[t1],...,[tn]>)

$[\forall x.A]_\varphi$= true if

$[A]_{\varphi[d/x]}$=true for all d∈U

ただしφ[d/x] は以下を満たす割り当て（変数の集合から領域Uへの関数）である。

φ[d/x] (x) = d

φ[d/x] (y) = φ(y) if xとyが異なる変数

$[\exists x.A \vee B]_\varphi$= true if

$[A]_{\varphi[d/x]}$=true for some d∈U

充足可能性

P : 論理式

- 解釈 φは *P* を充足する（satisfy）
  $[P]_\varphi$ ＝⊤
- *P* は充足可能（satisfiable）
  P を充足する解釈が存在する
- *P* は恒真（妥当）（valid） …
  任意の解釈 φが *P* を充足する
- *P* は充足不能（unsatisfiable）
  P を充足する解釈が存在しない

公理化

プロセス式

P ::= 0 | α.P | P+Q

公理系*A*（等価式）

(*A*) P+Q=Q+P P+(Q+R)=(P+Q)+R P+P=P P+0=P

健全性

A ⊢ P=Q ならば P ~ Q

完全性

P ~ Q ならば *A* ⊢ P=Q

公理化

+ に関する公理

P+(Q+R) = (P+Q)+R P+Q = Q+P P+P = P P+0 = P

| に関する公理

P|(Q|R) = (P|Q)|R P|Q = Q|P P|0 = P

観測性を考慮した公理

$\alpha.\tau.P = \alpha.P$ $P+\tau.P = \tau.P$ $\alpha.(P+\tau.Q) + \alpha.Q = \alpha.(P+\tau.Q)$

カリー・ハワードの対応

命題 … 型

A⊃*B* … *A*→*B*

*A*ならば*B* … *A*から*B*への関数の型

命題*A*の証明 … *A*を型として持つ項

A⊃*B*の証明 … *A*の証明をもらって

*B*の証明を返す関数

構成的な証明の考えに基づいている。

直観主義論理

Ichiro Satoh