既知のグラフを用いた小直径グラフの構成

Ryosuke MIZUNO
Department of Physics
Kyoto University

Yawara ISHIDA
Research Institute for
Mathematical Science
Kyoto University

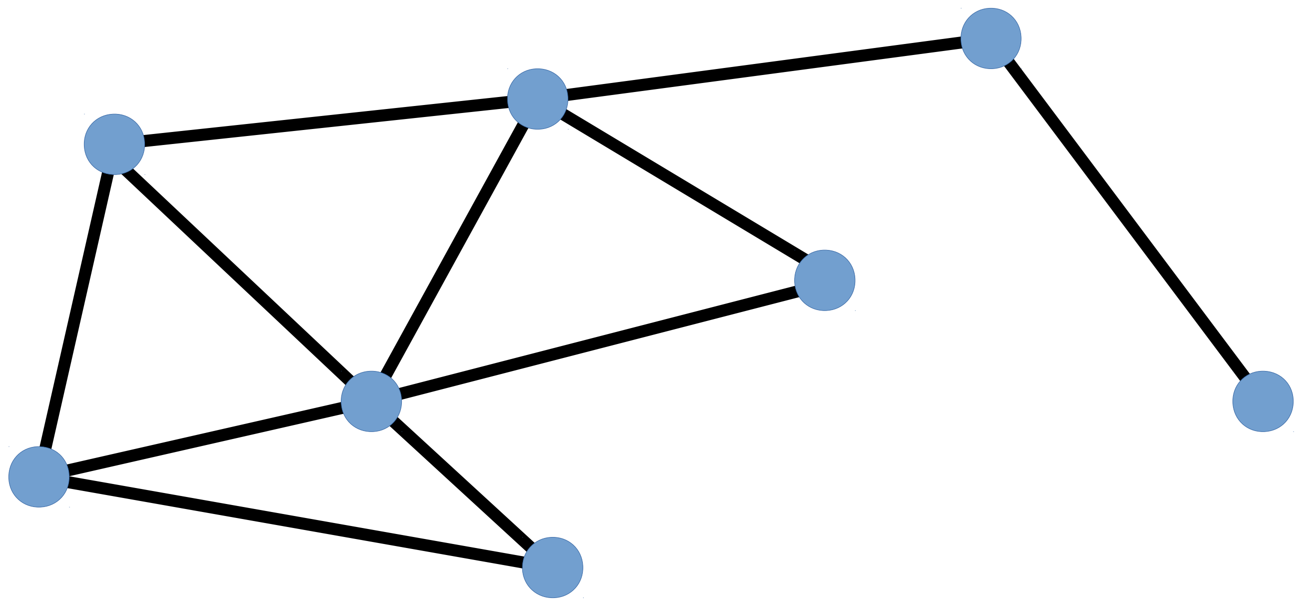
目次

(1) The Order-Degree Problem (ODP)

(2) ODPのためのグラフ構成法

(3) Summary

Remind definitions



Order = 頂点の数 = 8

Maximum Degree = （ある頂点に接続している辺の数）の最大値

= 5

Diameter = 頂点間距離の最大値 = 4

The Order-Degree Problem (ODP)

各 Order と Maximum degree に対して、Diameter が最小になるグラフを見つけよ！

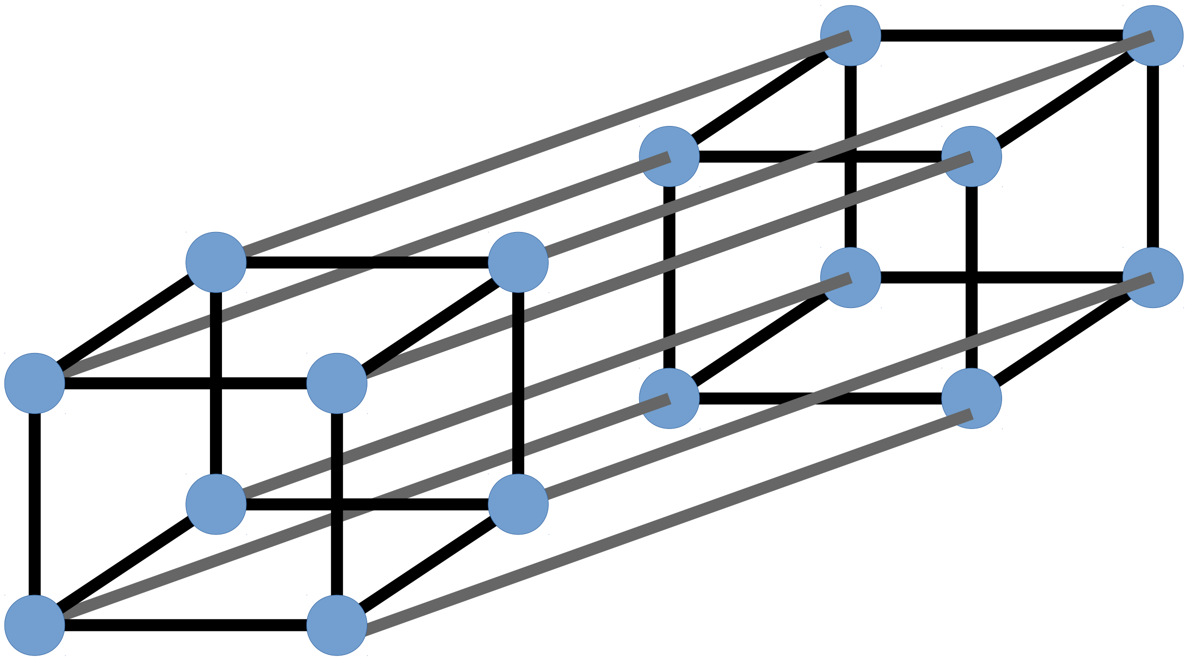
(さらに頂点間平均距離も最小化せよ！)

ODPの解は各頂点が短いパスで接続されている

ODPの解は低遅延なネットワーク設計の際に使える

Let’s consider the ODP
for Order =16 and Degree = 4

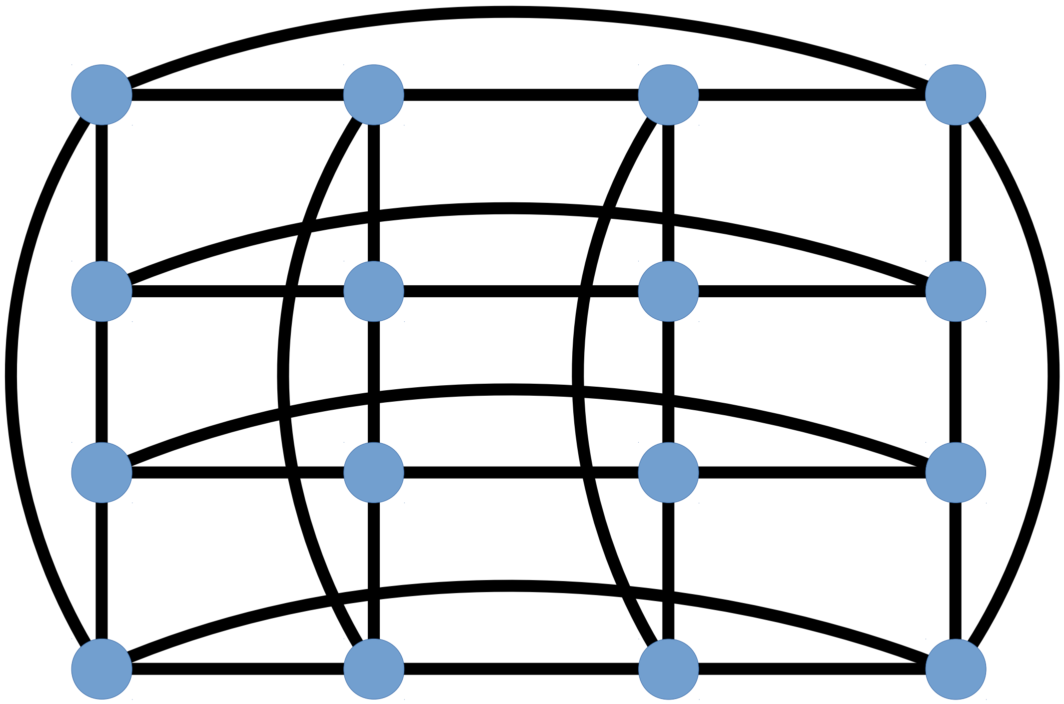
4-dimensional hypercube graph



Diameter = 4
これは解ではない！

Let's consider the ODP for Order =16 and Degree = 4

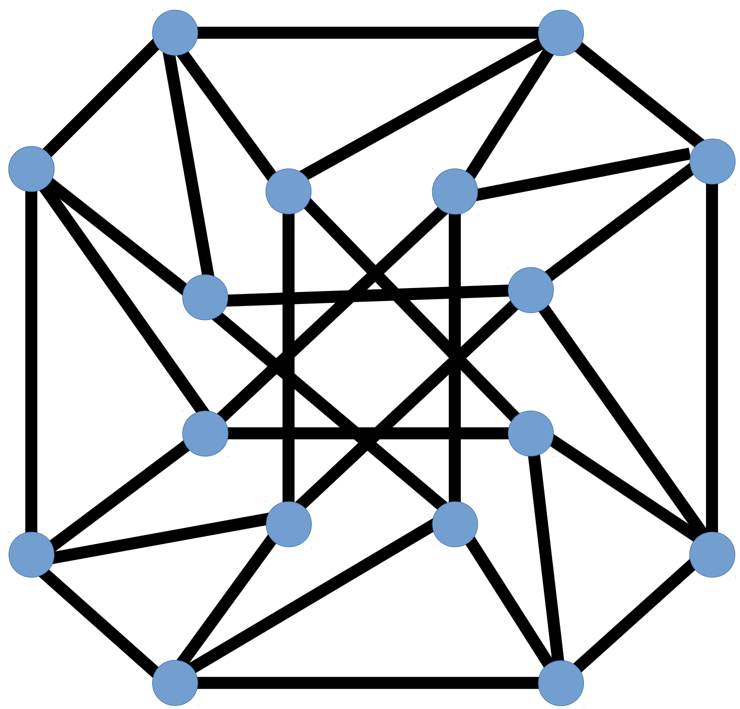
2-dimensional torus grid graph



Diameter = 4
これは解ではない！

Let's consider the ODP for Order =16 and Degree = 4

An example of optimal graph (*not unique in general*)



Diameter = 3

Order と Maximum degree が比較的小さいならODPの解を見つけるのは比較的簡単

↓

Q. 大きな *Order* と *Maximum degree* をもつ解を見つけるにはどうしたら良いのか？

大きなグラフをどう見つけるか？

Optimization

・任意のOrderとDegreeのグラフを作れる

・非常に大きなOrder (~1000000)に対しては計算が実行できない

Direct construction

・特定のOrderとDegreeのグラフしか作れない

・非常に大きなOrderのグラフも得られる

大きなグラフをどう見つけるか？

We focus on

Optimization

・任意のOrderとDegreeのグラフを作れる

・非常に大きなOrder (~1000000)に対しては計算が実行できない

Direct construction

・特定のOrderとDegreeのグラフしか作れない

・非常に大きなOrderのグラフも得られる

目次

(1) The Order-Degree Problem (ODP)

(2) ODPのためのグラフ構成法

(3) Summary

グラフの構成法

ex.

(1) Browns construction

(2) Generalized Browns construction

(3) Using algebraic structures

(4) Taking products of optimal graphs of ODP

- Cartesian product
- Strong product
- Multiple star product　(https://arxiv.org/abs/1608.08773)

(2) ODPのためのグラフ構成法

(1) Cartesian product $G \square H$

(2) Strong product $G \boxtimes H$

(3) Multiple star product $G *_{\varphi_L} H$

・二つのグラフを掛け合わせて大きなグラフを作る

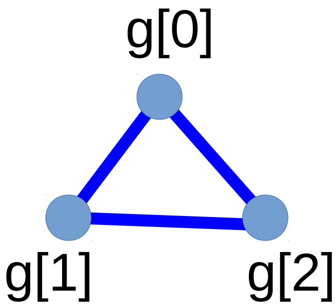
・ODPの最適グラフ二つをCartesian product や Strong product することで比較的直径の小さなグラフを得ることができる（ODPの解には一般にはならない）

・Multiple star product を用いてODPの最適グラフであるような無限個のグラフを新たに構成した.
（そのうちの一つがGraph Golfで賞をいただいたグラフ
Order=256, Degree=22, Diameter=2）

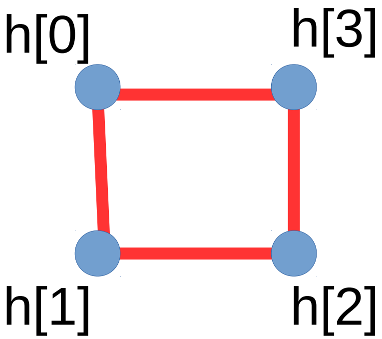
(1) Cartesian product

<u>Step1.</u> グラフ G と H を用意

G :

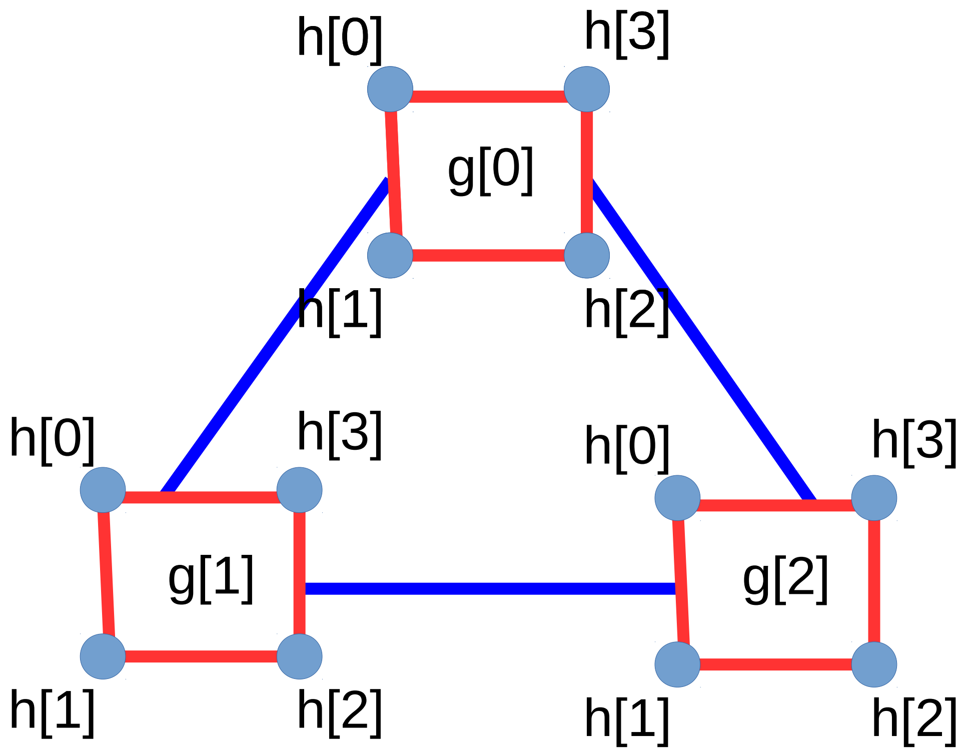


H :



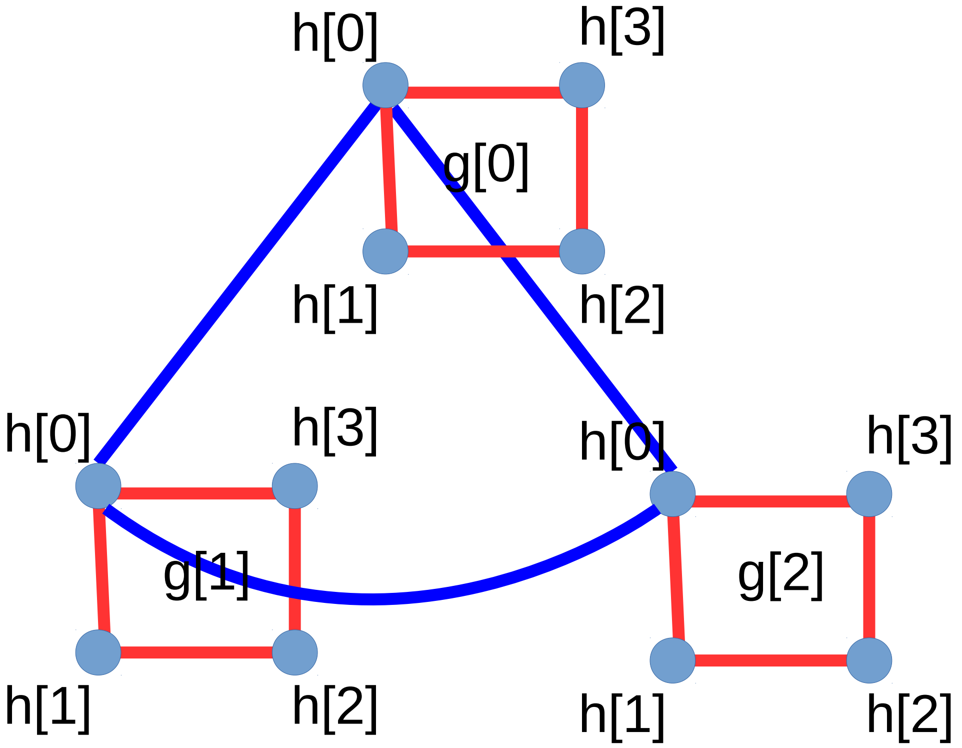
(1) Cartesian product

Step2.
H のコピーを G の各頂点に置く



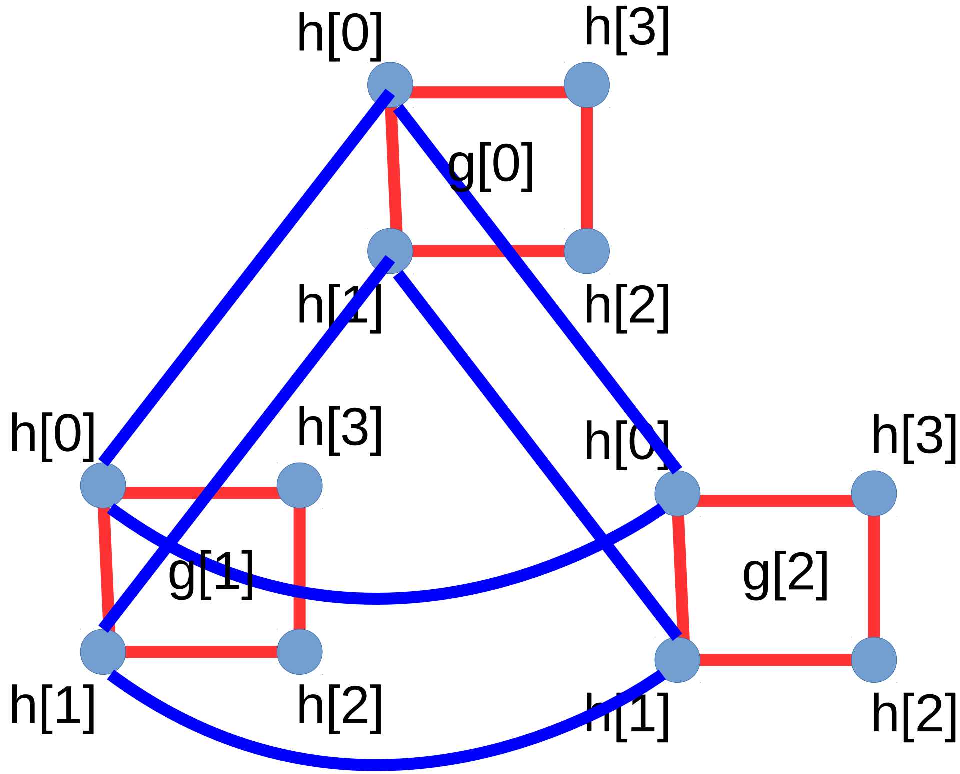
(1) Cartesian product

Step3.
G のコピーを H の同じ名前の頂点の上に重ねる



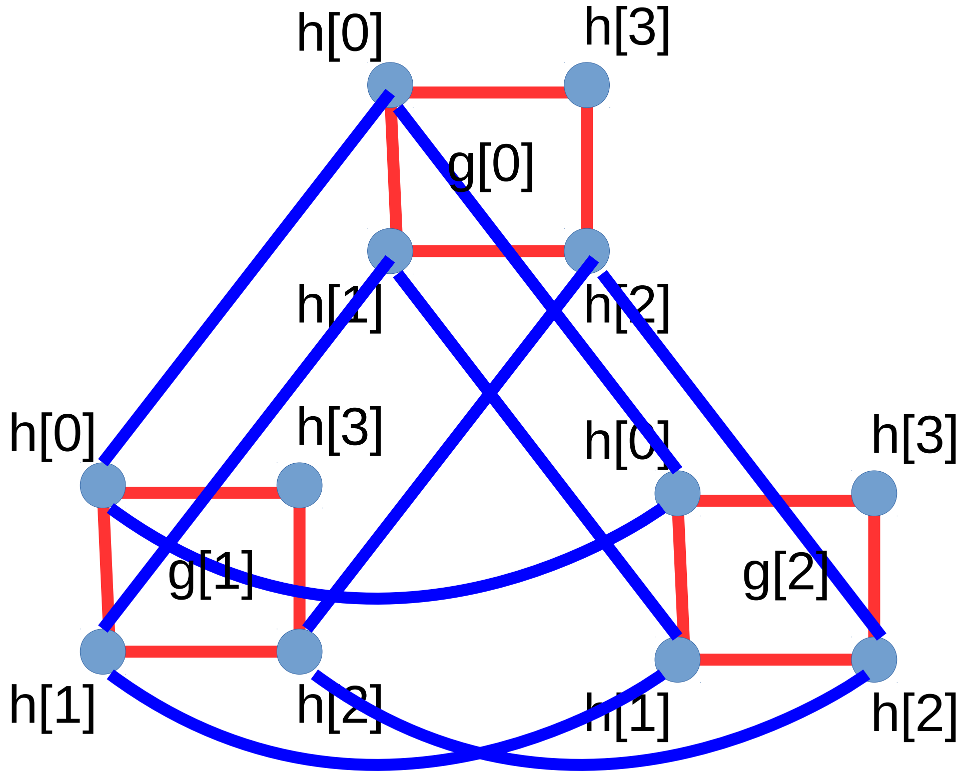
(1) Cartesian product

Step3.
G のコピーを H の同じ名前の頂点の上に重ねる



(1) Cartesian product

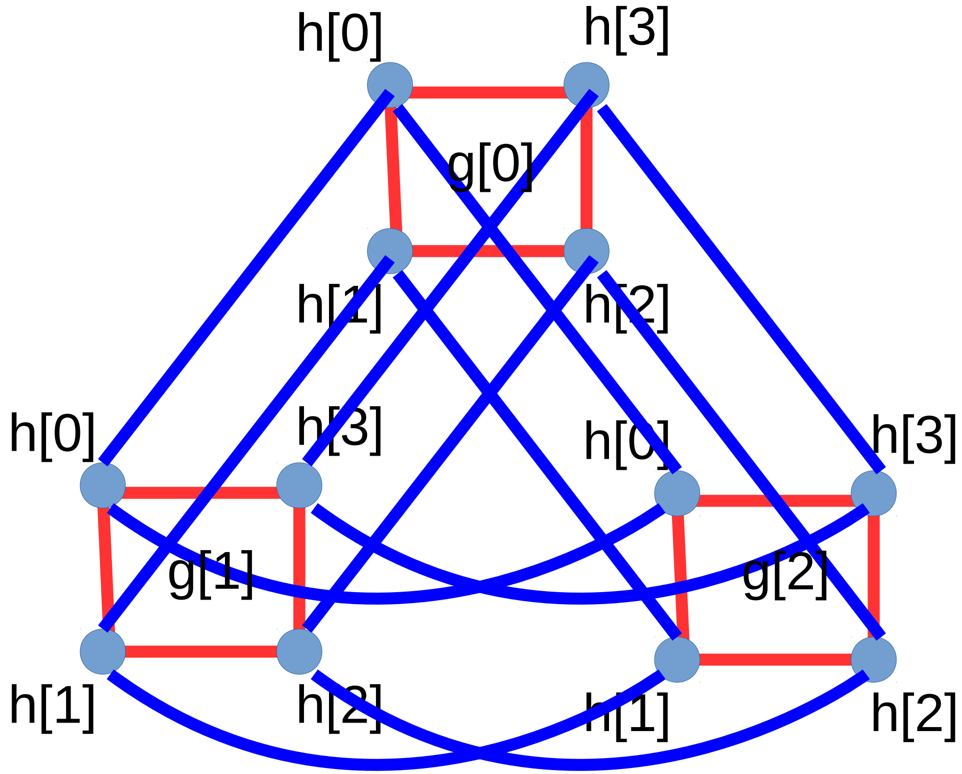
Step3.
G のコピーを H の同じ名前の頂点の上に重ねる



(1) Cartesian product

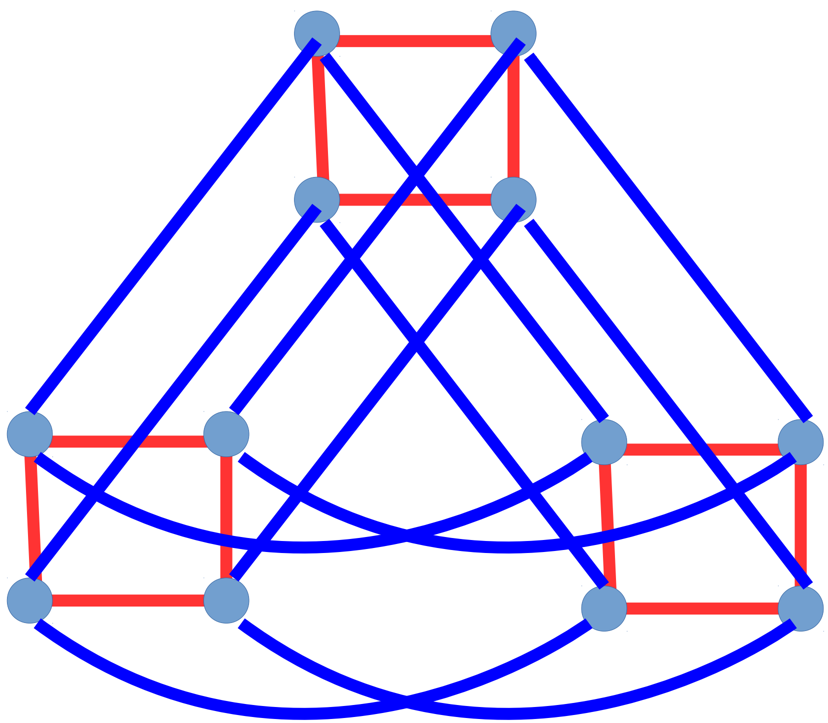
Step3.

G のコピーを H の同じ名前の頂点の上に重ねる



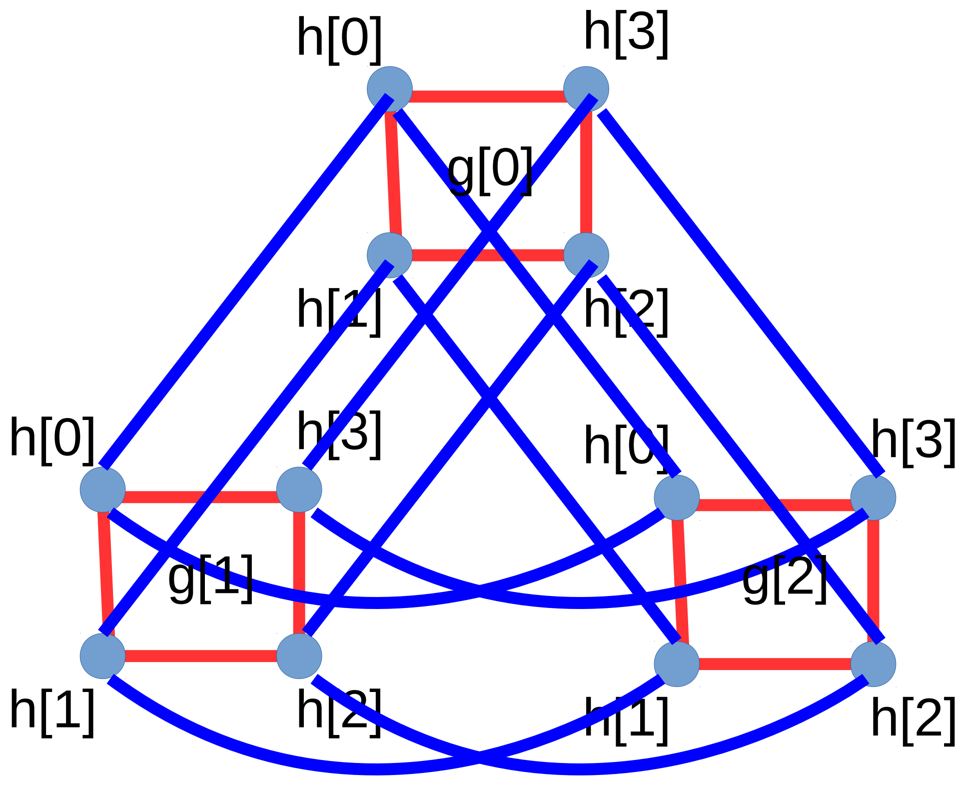
(1) Cartesian product

The cartesian product of G and H



(2) Strong product

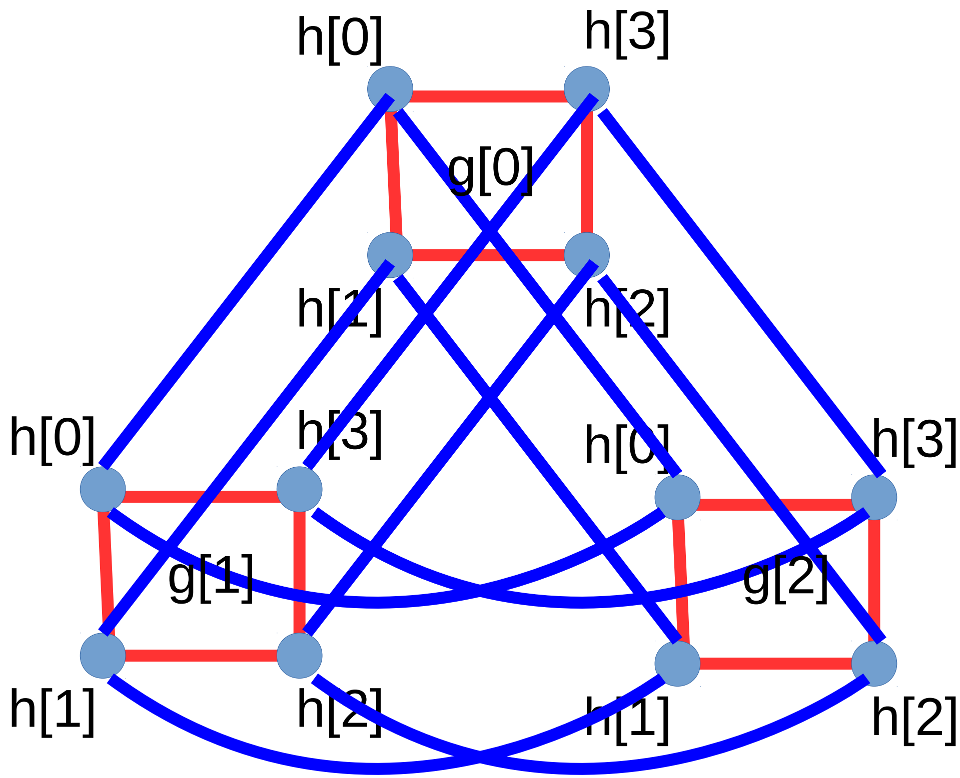
Step1, 2, 3はCartesian Productと同じ



(2) Strong product

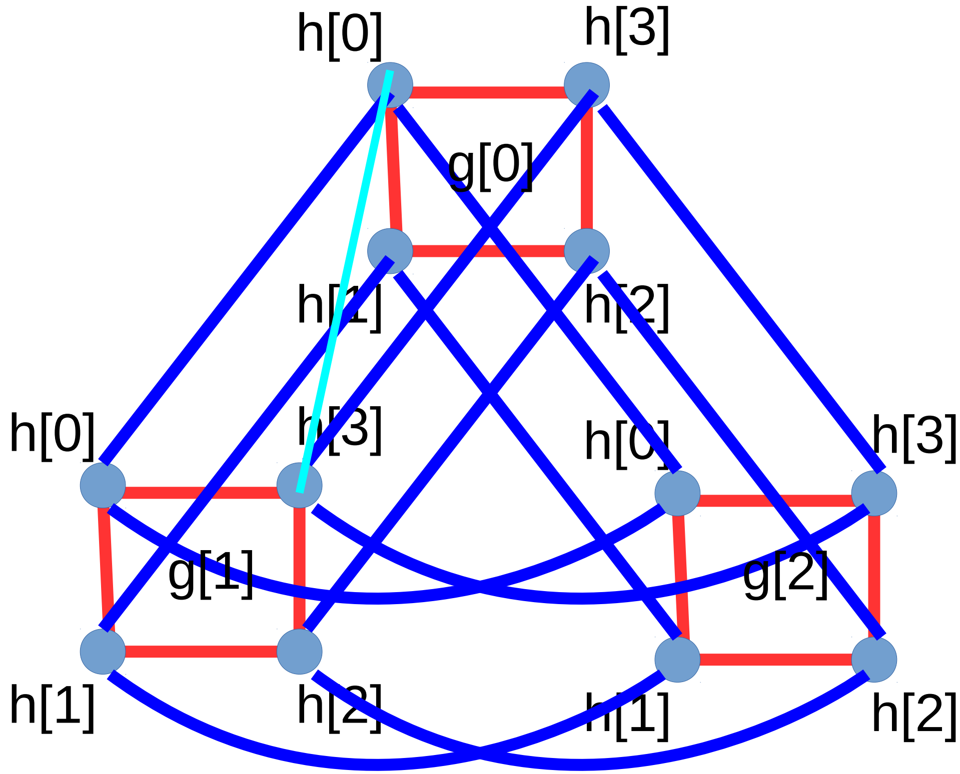
Step4.

G の辺一本＋ Hの辺一本で接続されている頂点同士を結ぶ



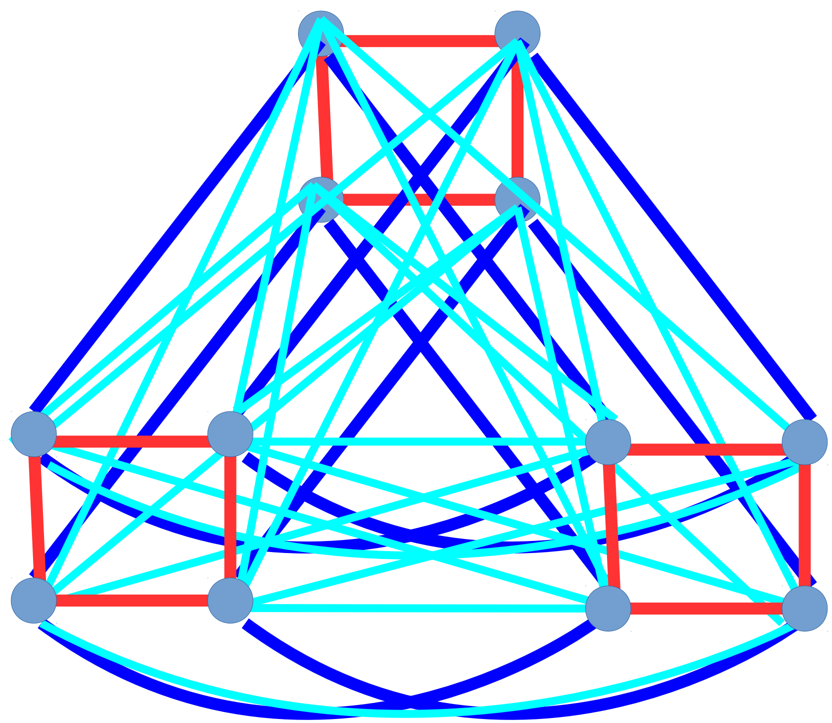
(2) Strong product

Step4.
G の辺一本＋ Hの辺一本で接続されている頂点同士を結ぶ



(2) Strong product

The strong product of G and H



Graph G

order $= O_g$

degree $= d_g$

diameter $= D_g$

Graph H

order $= O_h$

degree $= d_h$

diameter $= D_h$

Cartesian product G □ H

order $= O_g \times O_h$

degree $= d_g + d_h$

diameter $= D_g + D_h$

Strong product G ⊠ H

order $= O_g \times O_h$

degree $= (d_g+1) \times (d_h+1)-1$

diameter $= \max(D_g, D_h)$

Cartesian product や Strong product ではあまりいいグラフはつくれない

∵G や H の構造を考慮して掛け合わせていないから

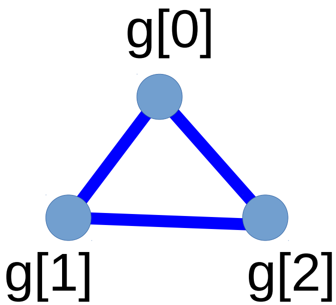
<u>一方で、</u>

Multiple star product では *G* や *H* の構造を考慮して最適な辺の追加の仕方をデザインできる

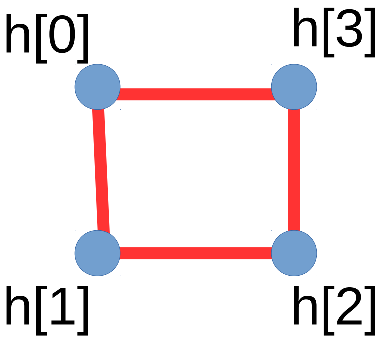
(3) Multiple star product

Step1. グラフ G と H を用意

G :



H :



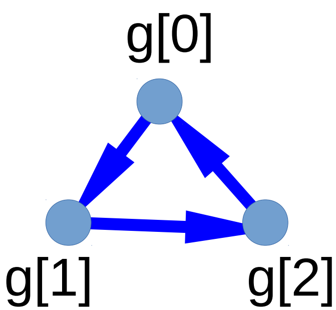
(3) Multiple star product

Step2.

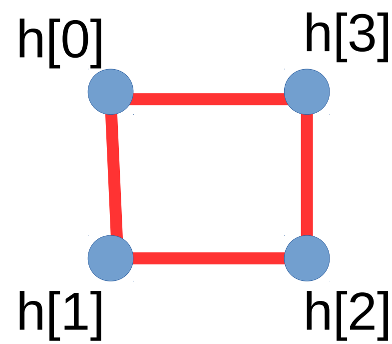
・Gの辺の方向を選ぶ

・Hの頂点の置換 $\varphi_L = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ を用意する

G :



H :

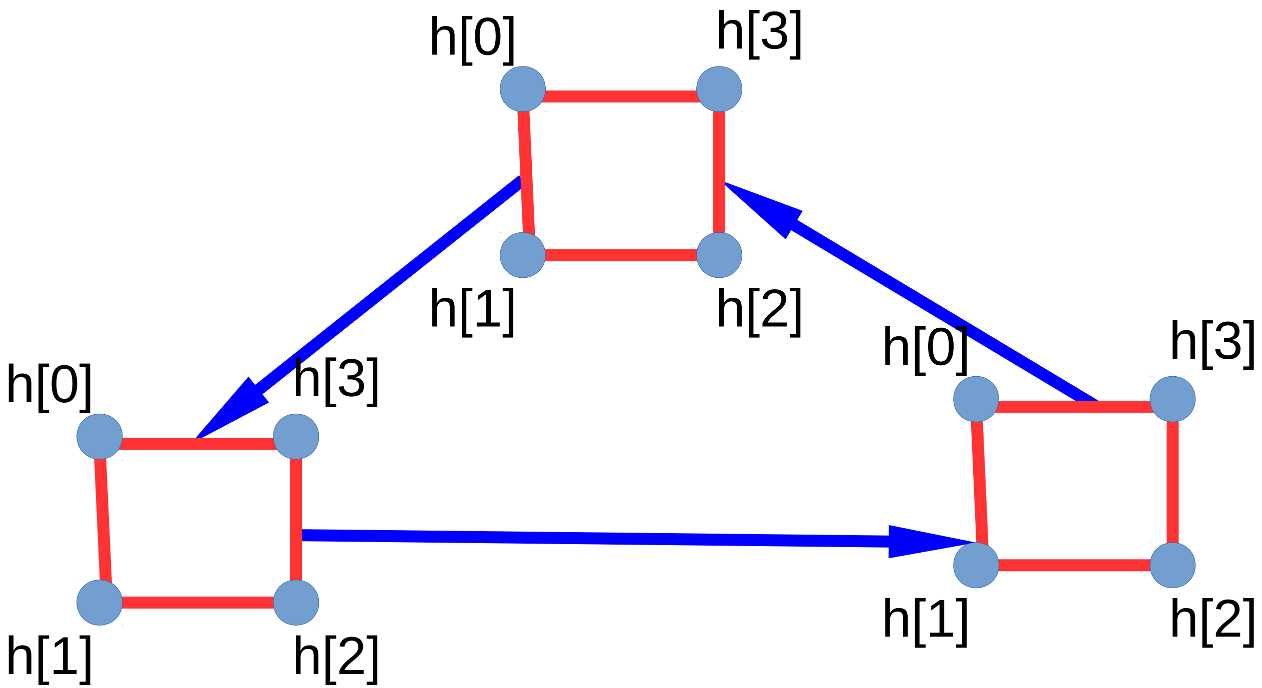


$$\varphi_1(h[n]) = h[n+1 \bmod 4]$$

$$\varphi_2(h[n]) = h[n-1 \bmod 4]$$

(3) Multiple star product

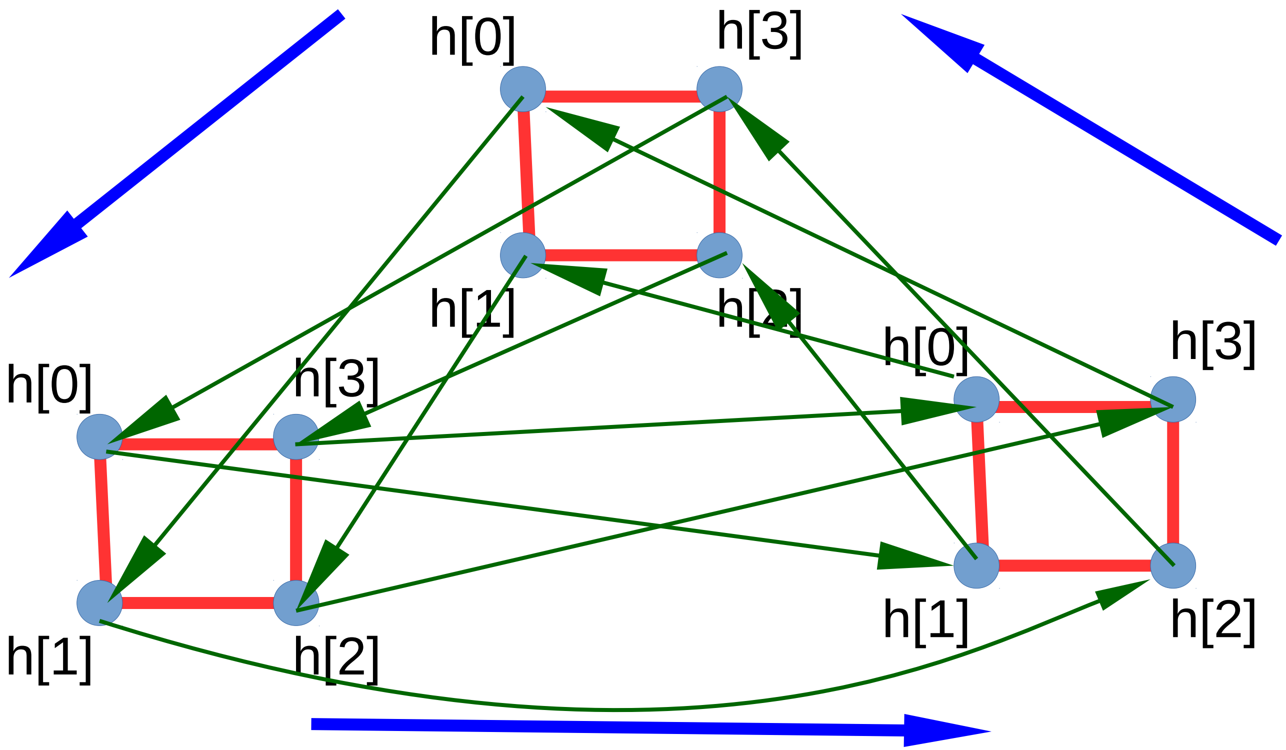
Step3.
H のコピーを G の各頂点に置く



$$\varphi_1(h[n]) = h[n+1 \bmod 4]$$
$$\varphi_2(h[n]) = h[n-1 \bmod 4]$$

(3) Multiple star product

Step4.
Gの各辺に沿ってHの頂点の置換に対応する矢印を描く

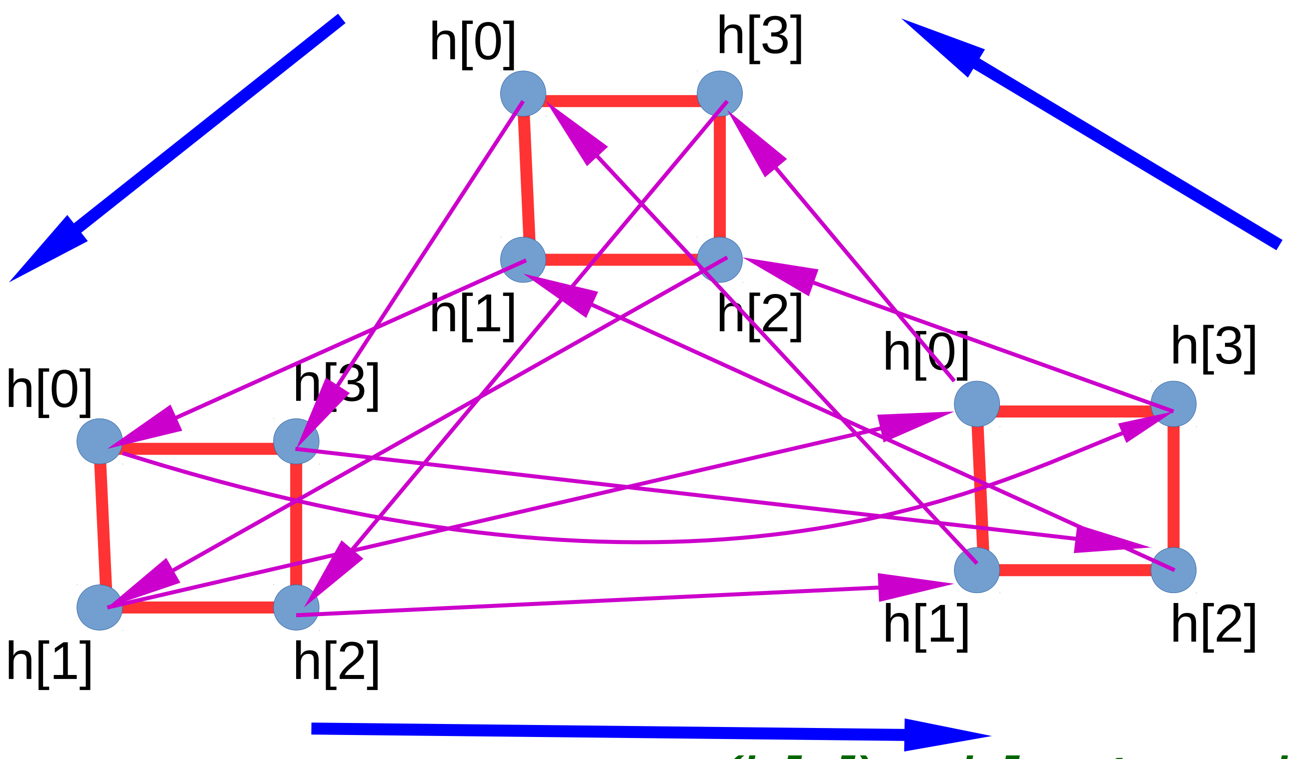


$\varphi_1(h[n]) = h[n+1 \bmod 4]$

$\varphi_2(h[n]) = h[n-1 \bmod 4]$

(3) Multiple star product

Step4.
Gの各辺に沿ってHの頂点の置換に対応する矢印を描く

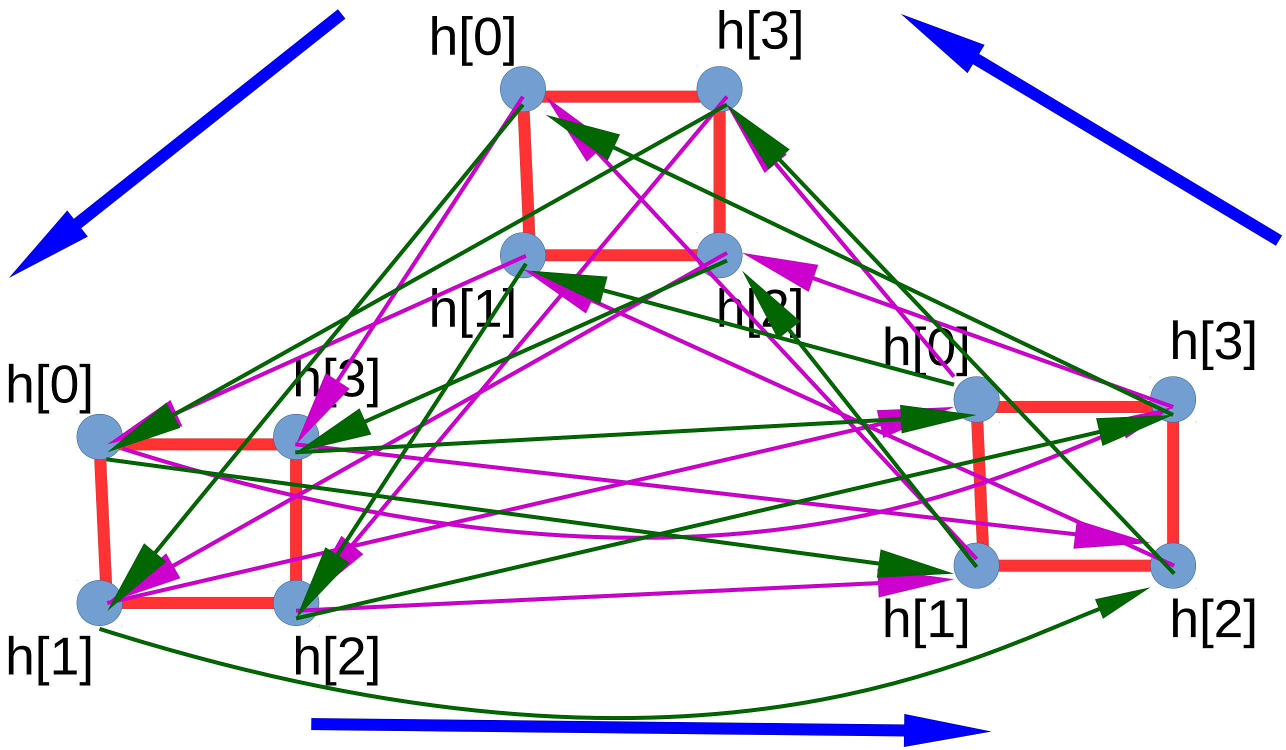


$\varphi_1(h[n]) = h[n+1 \bmod 4]$

$\varphi_2(h[n]) = h[n-1 \bmod 4]$

(3) Multiple star product

Step4.
GのHの各辺に沿ってHの頂点の置換に対応する矢印を描く



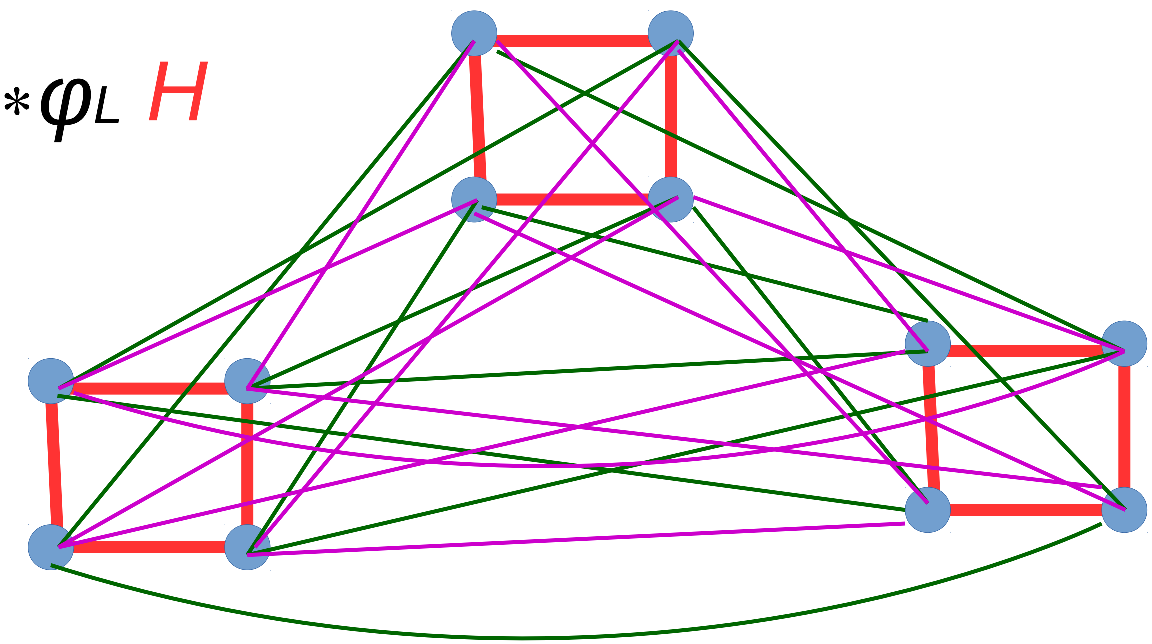
$\varphi_1(h[n]) = h[n+1 \bmod 4]$

$\varphi_2(h[n]) = h[n-1 \bmod 4]$

(3) Multiple star product

Step5.
矢印を辺に置き換える

$G *_{\varphi_L} H$



$\varphi_1(h[n]) = h[n+1 \bmod 4]$

$\varphi_2(h[n]) = h[n-1 \bmod 4]$

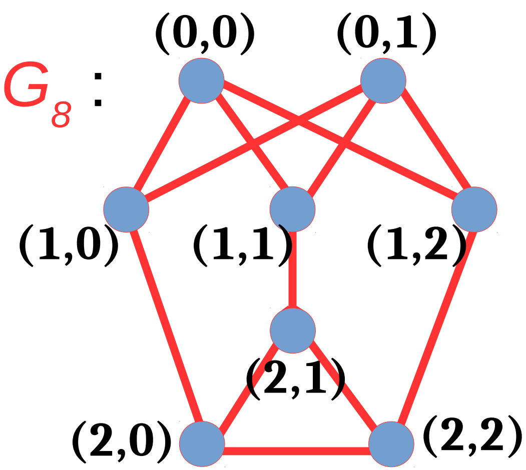
<u>Example</u> $C_k \ast\varphi\, G_8$

C_k : k-complete graph

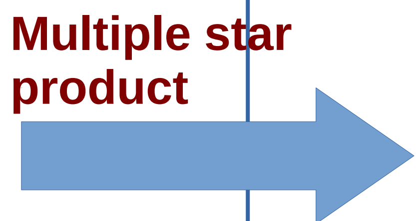
・ Vertex set = {0,1,...,k−1}

・ 各頂点同士がすべて辺で結ばれている

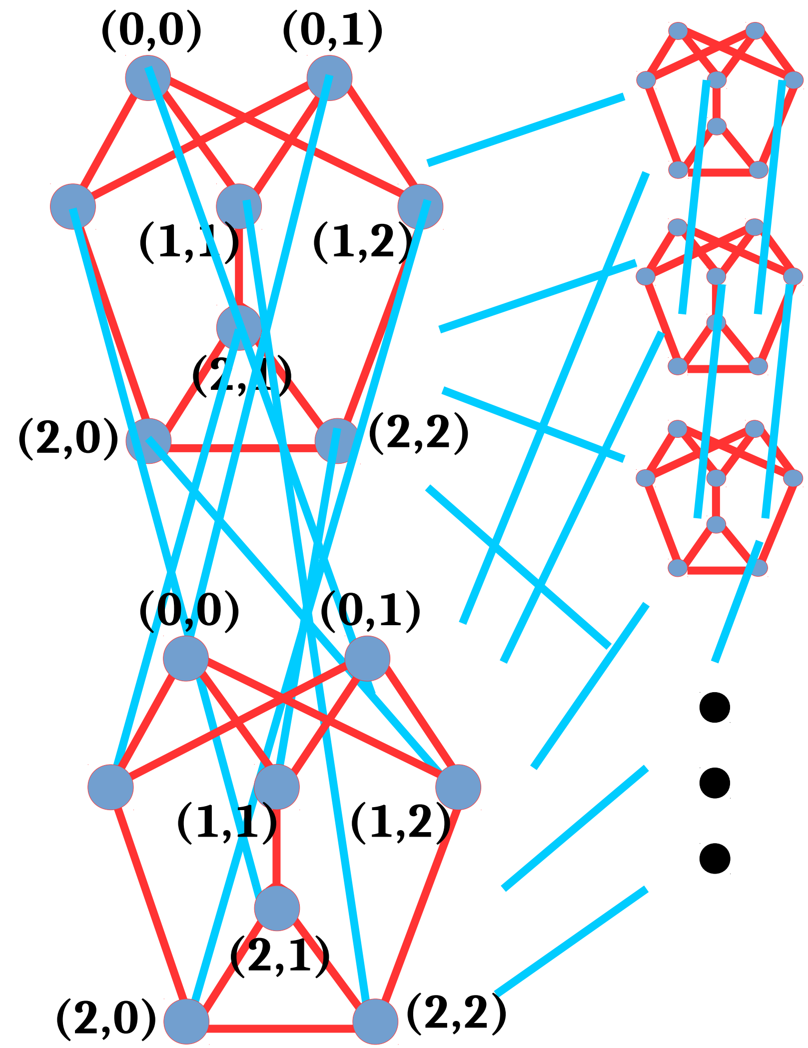
G_8 :



$$\varphi((i,j)) = \begin{cases} (0, 1-j) & (i=0) \\ (2, j+1 \bmod 3) & (i=1) \\ (1, j-1 \bmod 3) & (i=2). \end{cases}$$



$C_k \ast\varphi\, G_8$

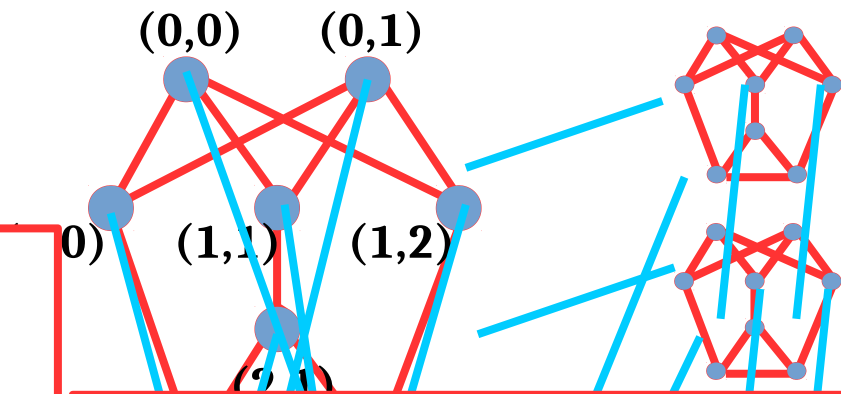


<u>Example</u> $C_k *_{\varphi} G_8$

C_k : k-complete graph

- Vertex set = {0,1,...,k−1}
- 各頂点同士がすべて辺で結ばれている

$C_k *_{\varphi} G_8$



Order = 8k
Degree = k + 2
Diameter = 2 (if k = 2, Diameter = 3)

- $C_k *_{\varphi} G_8$ は*ODP*の解
- *k = 1,2,3,4,5*の時、$C_k *_{\varphi} G_8$ の*Degree*は、同じ*Order,Diameter*を持つグラフの中で最小

頂点同士が最も効率的に接続

<u>*cf.*</u>

<u>*Cartesian product*</u>
Order = 8k
Degree = k + 2
Diameter = 3

<u>*Strong product*</u>
Order = 8k
Degree = 4k-1
Diameter = 2

New solutions. $C_m * \psi_L (C_k * \varphi\, G_8)$

C_m (m-complete graph) と $C_k * \varphi\, G_8$ のMultiple star productをとる

置換ψ_L は $C_k * \varphi\, G_8$の頂点を(k,(i,j)) とした時、以下のように定義

$$\psi_1((k,(i,j)))= \begin{cases} (k,(0,0)) & ((i,j)=(0,0)) \\ (k,(0,1)) & ((i,j)=(1,0)) \\ (k,(1,0)) & ((i,j)=(1,1)) \\ (k,(2,1)) & ((i,j)=(1,2)) \\ (k,(1,1)) & ((i,j)=(0,1)) \\ (k,(2,2)) & ((i,j)=(2,0)) \\ (k,(1,2)) & ((i,j)=(2,1)) \\ (k,(2,0)) & ((i,j)=(2,2)) \end{cases}$$

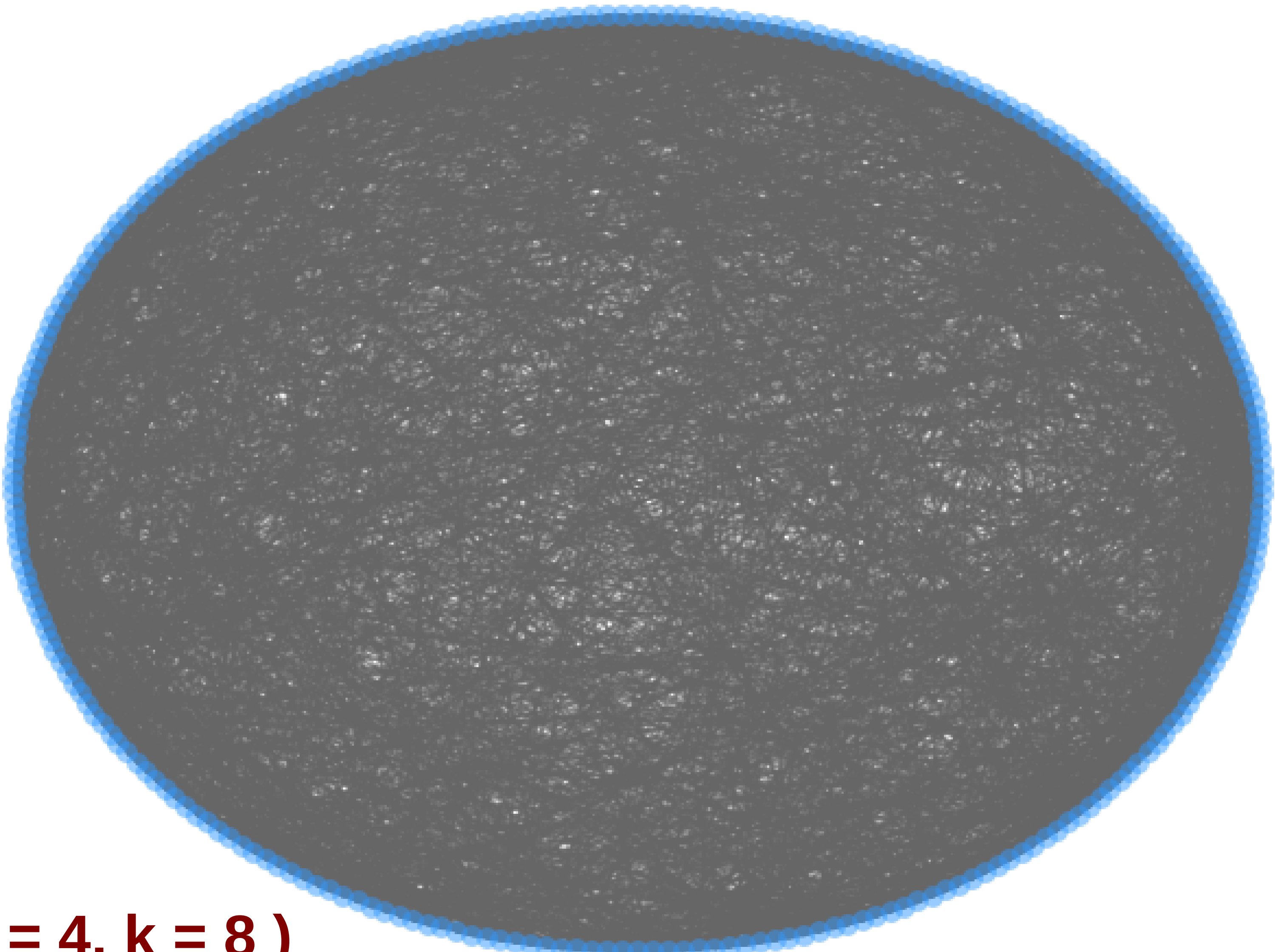
$$\psi_3((k,(i,j)))= \begin{cases} (k,(1,0)) & ((i,j)=(0,0)) \\ (k,(2,1)) & ((i,j)=(1,0)) \\ (k,(0,0)) & ((i,j)=(1,1)) \\ (k,(0,1)) & ((i,j)=(1,2)) \\ (k,(1,2)) & ((i,j)=(0,1)) \\ (k,(2,0)) & ((i,j)=(2,0)) \\ (k,(1,1)) & ((i,j)=(2,1)) \\ (k,(2,2)) & ((i,j)=(2,2)) \end{cases}$$

$$\psi_2((k,(i,j)))= \begin{cases} (k,(0,1)) & ((i,j)=(0,0)) \\ (k,(1,0)) & ((i,j)=(1,0)) \\ (k,(2,1)) & ((i,j)=(1,1)) \\ (k,(0,0)) & ((i,j)=(1,2)) \\ (k,(2,2)) & ((i,j)=(0,1)) \\ (k,(1,2)) & ((i,j)=(2,0)) \\ (k,(2,0)) & ((i,j)=(2,1)) \\ (k,(1,1)) & ((i,j)=(2,2)) \end{cases}$$

$$\psi_4((k,(i,j)))= \begin{cases} (k,(2,1)) & ((i,j)=(0,0)) \\ (k,(0,0)) & ((i,j)=(1,0)) \\ (k,(0,1)) & ((i,j)=(1,1)) \\ (k,(1,0)) & ((i,j)=(1,2)) \\ (k,(2,0)) & ((i,j)=(0,1)) \\ (k,(1,1)) & ((i,j)=(2,0)) \\ (k,(2,2)) & ((i,j)=(2,1)) \\ (k,(1,2)) & ((i,j)=(2,2)) \end{cases}$$

4-multiple star product

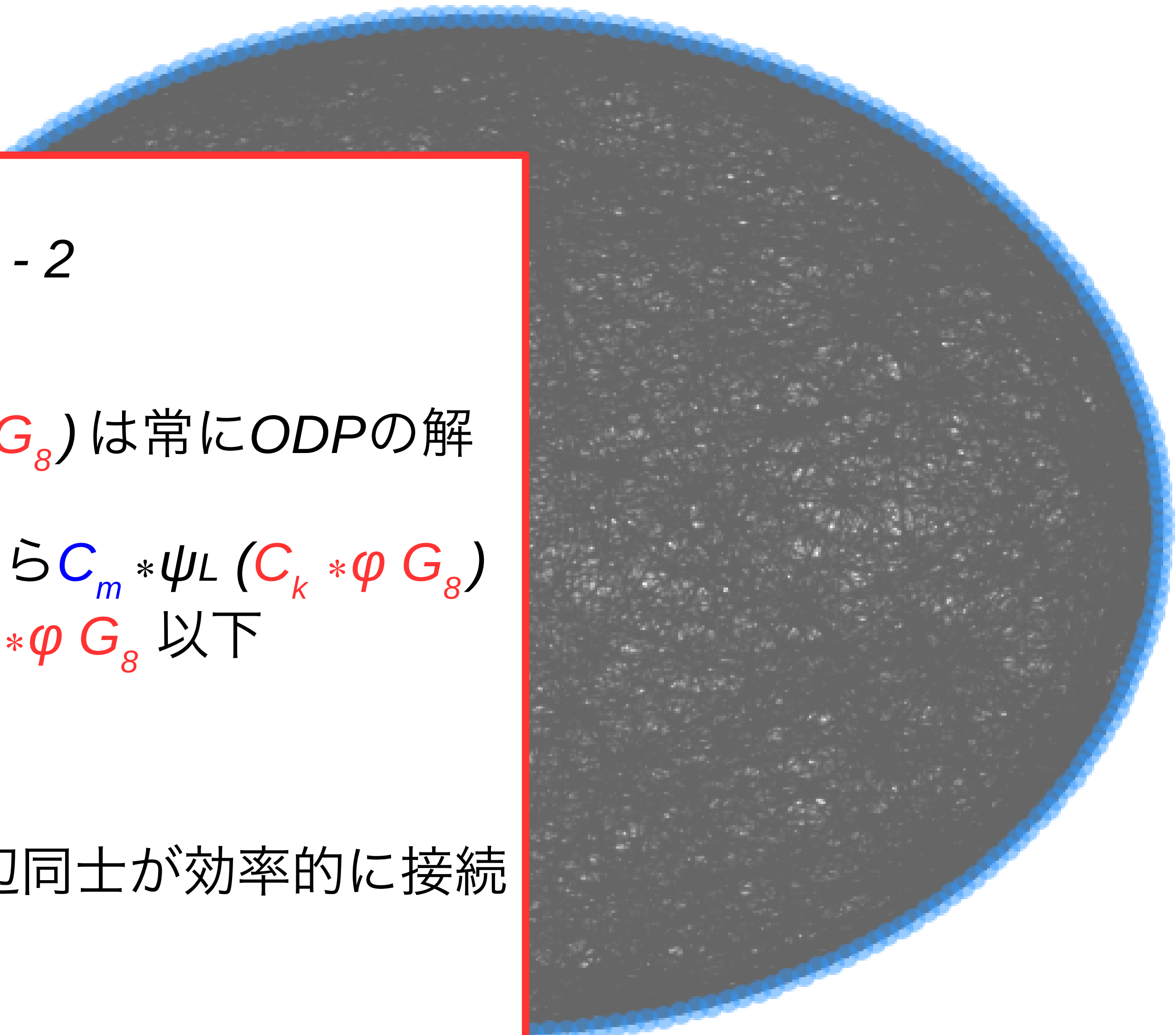
New solutions. $C_m * \psi_L (C_k * \varphi G_8)$



(m = 4, k = 8)

(Graph Golf 2015 <http://research.nii.ac.jp/graphgolf/2015/ranking.htm

New solutions. $C_m * \psi_L (C_k * \varphi G_8)$



Order = 8km
Degree = 4m + k - 2
Diameter = 2

・$C_m * \psi_L (C_k * \varphi G_8)$ は常に*ODP*の解

・*Order*が同じなら$C_m * \psi_L (C_k * \varphi G_8)$ の*Degree*は$C_n * \varphi G_8$ 以下

$C_n * \varphi G_8$よりも辺同士が効率的に接続

earch.nii.ac.jp/graphgolf/2015/ranking.htm

目次

(1) The Order-Degree Problem (ODP)

(2) ODPのためのグラフ構成法

(3) Summary

(3) Summary

- ODPとは各 Order と Maximum degree に対し Diameter が最小になるグラフを見つける問題
- ODPの解をProductすると比較的Diameterの小さなグラフが得られる。しかし一般にはDiameter最小ではないのでODPの解ではない
- Multiple star productを用いると非常に効率的に接続されたDiameterの小さいグラフを構成できる。ただし良い置換 φ_Lを見つける必要あり。
- Multiple star productを用いて無限個のODPの解であるグラフ $C_m *\psi_L (C_k *\varphi G_8)$ を構成した。